Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ y un punto X sobre la recta BC,

(a) Inscribir una parábola en los lados del triángulo de manera que X sea el punto de tangencia con la recta BC.

(b) Demostrar que si Y, Z son los puntos de tangencia con los lados CA, AB y X', Y', Z' son los simétricos de X, Y, Z respecto de los puntos medios de BC, CA, AB, entonces las rectas AX', BY', CZ' son paralelas al eje de la parábola.

(c) Las rectas isogonales de AX', BY', CZ', es decir las rectas simétricas de estas rectas respecto de las bisectrices interiores AI, BI y CI, son concurrentes en el foco de la parábola.

SOLUCIÓN:

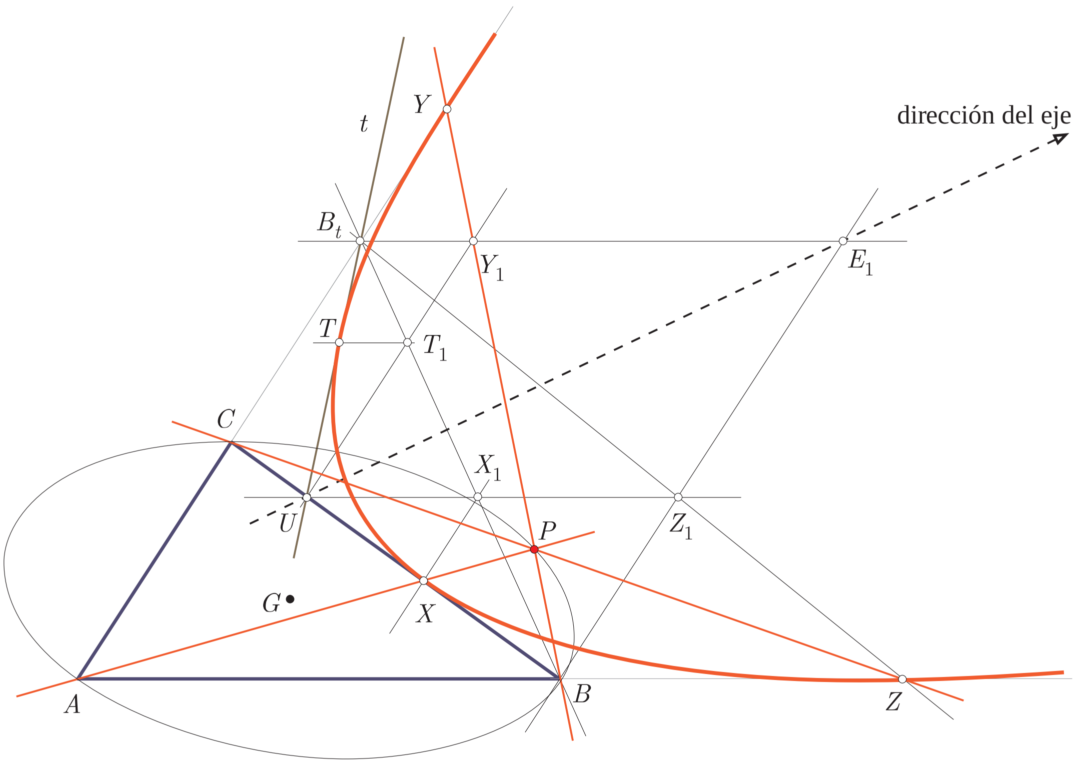
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **505**.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por Francisco Javier García Capitán.

—— - ——

Para la construcción, por puntos, de una cónica tangente a cuatro rectas conociendo el punto de tangencia en una de ellas, podemos utilizar el teorema de Brianchon(1)(dual del teorema de Pascal, relativo a un hexágono inscrito en una cónica).

Para el caso que nos ocupa, al tratarse de parábolas, una de las rectas tangentes puede ser tomada la del infinito. Además, como se conoce un punto de tangencia en una de las rectas dadas, se tomará un caso límite del teorema de Brianchon, cuando se sustituye el punto de intersección de dos tangentes por el punto de tangencia de una de ellas.

De la parábola tangente a los lados de un triángulo $\widehat{ABC}$, sabiendo que el punto de tangencia con el lado BC es el punto X, vamos a determinar los puntos Y y Z de tangencia con los otros lados CA y AB, respectivamente; así como la dirección de su eje. Por el teorema de Brianchon (en su caso límite de un triángulo circunscrito a una cónica) las rectas AX, BY y CY concurren en un mismo punto P (punto de Brianchon), conocido como perspector de la cónica inscrita.



Vamos primeramente a trazar la otra tangente a tal parábola desde un punto U sobre BC, distinto de B, C y X:

Consideremos las cinco tangentes a la parábola: ℓ (recta del infinito), AB, BC, t (la otra tangente desde U, a determinar) y CA. Los vértices opuestos del hexágono $BXUB_tB_\infty C_\infty$, donde $B_t = t \cap CA$ (a determinar), $B_\infty = \ell \cap CA$ y $C_\infty = \ell \cap AB$. Entonces, para obtener la tangente t, trazamos la recta XB_∞ (paralela por X al lado CA) y UC_∞ (paralela por U al lado AB); el punto de corte X_1 de éstas y el punto B determinan una recta que corta a CA en B_t; la tangente t buscada es UB_t.

(1) Teorema de Brianchon.- En todo hexágono circunscrito a una cónica las rectas que unen vértices opuesto concurren en un mismo punto.

Ahora vamos a determinar los puntos de contacto de estas tangentes con la parábola. Para ello hacemos uso de nuevo del teorema de Brianchon, aplicado al hexágono circunscrito, ya determinado, $BXUB_tB_\infty C_\infty$:

El punto Y, punto de tangencia con el lado CA, es $BY_1 \cap CA$, donde Y_1 es el punto de concurrencia de la paralela a CA por U con la paralela a AB por B_t. Para obtener Z, punto de tangencia con AB, unimos B_t con el punto de intersección Z_1 de la paralela por U a AB con la paralela por B a CA, entonces $Z = B_tZ_1 \cap CA$.

El mismo procedimiento nos lleva a obtener el punto de tangencia T con la tangente t: es el punto de corte de t con la paralela a AB por T_1, siendo T_1 el punto donde se cortan la recta BB_t con la paralela a CA por U.

Finalmente, la dirección del punto de tangencia de la parábola con la recta del infinito (es decir, la dirección de su eje) es la de la recta que une U con el punto E_1, donde se corta la paralela a CA por B con la paralela a AB por B_t.

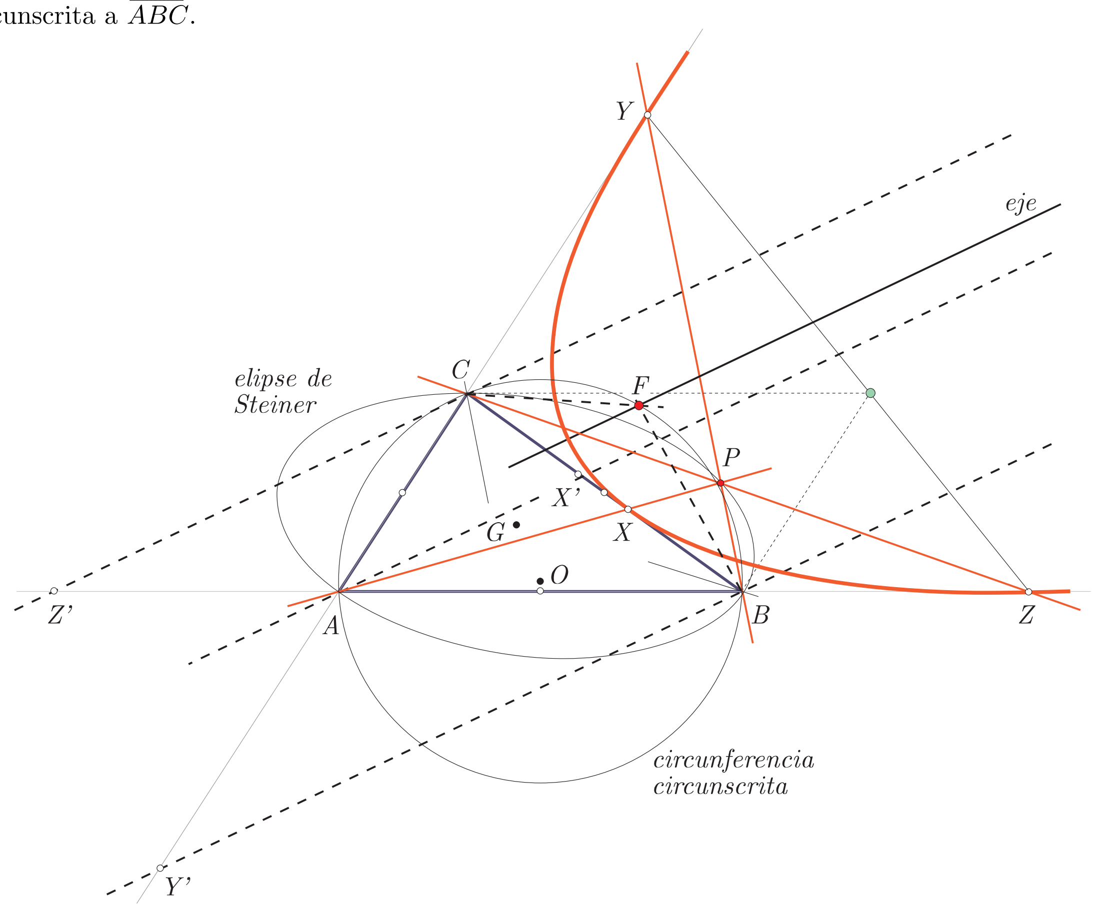
(a) La parábola en cuestión queda construida, para un X fijo, como el lugar que describe T cuando U varía en BC.

— — — — — — — — — — — —

Vamos a describir el lugar geométrico [2] del punto P de concurrencia de las rectas AX, BX y CX, cuando X varía en BC:

Para ello consideramos ahora el hexágono circunscrito $BCYB_\infty C_\infty Z$; se tiene que las rectas BB_∞, CC_∞ e YZ son concurrentes en el punto (vértice del triángulo triángulo anticomplementario) simétrico de A, respecto al punto medio del lado BC. En consecuencia, las rectas YZ pasan siempre por un mismo punto, cuando X varía, es decir, para todas las parábolas inscritas en $\widehat{ABC}$.

Tenemos así definida una proyectividad $Y \mapsto Z$ entre las rectas AC y AB y, por consiguiente, una proyectividad entre los haces de rectas con puntos base en B y C, $BY \mapsto CZ$. Entonces, la intersección de rayos homólogos $P = BY \cap CZ$, describen un cónica $\mathcal{E}$ que pasa por B y C. Como $B_\infty \mapsto B$, se tiene que a la recta BB_∞ corresponde la recta CB, que une los puntos base, es decir, BB_∞ (paralela a AC) es tangente a la cónica. Similarmente resulta que la tangente en C a la cónica es la paralela al lado AB. Consideraciones similares, nos llevan a que las rectas XY y XZ pasan, para cualquier parábola inscrita, por los otros vértices del triángulo anticomplementario y que $\mathcal{E}$ pasa por A y que la tangente en este punto es paralela a BC. En consecuencia, la cónica $\mathcal{E}$, que describe P, es la cónica de Steiner circunscrita a $\widehat{ABC}$.



(b) Las rectas AX', BY' y CZ' concurren en el conjugado isotómico $P^\bullet$ de P, que como $P = AX \cap BY \cap CZ$ está la elipse circunscrita de Steiner, está en la recta del infinito, es decir, AX', BY' y CZ' son paralelas. Este resultado,

[2] Para la obtención del lugar geométrico descrito por P, utilizando un sistema de coordenadas afines, puede verse http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejco1859.pdf

así como que la dirección de estas rectas es la del eje de la parábola, las estableceremos en el estudio analítico que haremos a continuación. Sólo enunciar ahora que el conjugado isogonal de $P^{\bullet}$, que está en la circunferencia circunscrita a $\widehat{ABC}$, es el foco de la parábola.

Resolución analítica:

La ecuación tangencial[(3)] de una cónica inscrita al triángulo $\widehat{ABC}$ es, en coordenadas baricéntricas tangenciales,

$$pvw + qwu + ruv = 0,$$

ya que debe ser satisfecha por las coordenadas tangenciales $(1:0:0), (0:1:0), (0:0:1)$ de sus lados $BC, x = 0; CA, y = 0; AB, z = 0$ y, por tanto, carece de los sumandos con u^2, v^2, w^2.

Esta cónica es una parábola si es tangente a la recta del infinito, $x + y + z = 0$, de coordenadas tangenciales $(1:1:1)$; por lo que los coeficientes han de satisfacer $p + q + r = 0$.

Los puntos de tangencia con los lados de BC, CA y AB y con la recta del infinito son los polos de tales rectas; que son, respectivamente:

$$X(0:r:q), \qquad Y(r:0:p), \qquad Z(q:p:0), \qquad (p:q:r).$$

Dado el punto de contacto $X(0:r:q)$ de la parábola con el lado BC, ésta queda determinada; pues, obteniendo p de la relación $p+q+r=0$, se obtienen las coordenadas de los otros puntos Y y Z de contacto con los otros lados.

El punto de intersección de las rectas $AX \equiv qy - rz = 0, BY \equiv px - rz = 0, CZ \equiv px - qy = 0$ (perspector de la cónica) es

$$P\left(\frac{1}{p} : \frac{1}{q} : \frac{1}{r}\right).$$

El lugar geométrico que describe el perspector de las parábolas inscritas a $\widehat{ABC}$, se obtiene eliminando p, q y r entre las relaciones $x = 1/p, y = 1/q, z = 1/r, p + q + r = 0$, resultando la elipse de Steiner circunscrita a $\widehat{ABC}$:

$$yz + zx + xy = 0.$$

El punto simétrico de $X(0:r:q)$ respecto el punto medio $M_a(0:1:1)$ es X', tal que $XM_a : M_aX' = 1:1$, por lo que[(4)] $X'(0:q:r)$. Análogamente, obtenemos los simétricos $Y'(p:0:r)$ y $Z'(p:q:0)$ de Y y Z, respecto a los puntos medios de los lados CA y AB, respectivamente.

Las rectas $AX' \equiv qy + rz = 0, BY' \equiv px + rz = 0, CZ' \equiv px + qy = 0$ tienen común el punto $P^{\bullet}(p:q:r)$, conjugado isotómico de P, que es el punto del infinito de la parábola.

Esto establece el apartado (b) del enunciado.

— — — — — — — — — — —

Para establecer que el conjugado isogonal del punto de infinito de la parábola $P^{\bullet}$ es el foco F, con el objetivo de probar el apartado (c), utilizamos el segundo teorema de Poncelet (Puig Adam.- Curso de Geometría Métrica. Tomo II, Lección 29, §2, pág. 223. 11ª Edición, Madrid, 1973.), que para el caso de la parábola dice:

El ángulo que forma una de las tangentes desde un punto exterior M a la parábola con la recta que une M con el foco F, es igual al que forma la otra tangente con la paralela por M al eje.

Este resultado nos dice que la paralela al eje por M y la recta MF son conjugadas isogonales respecto a las tangentes desde M.

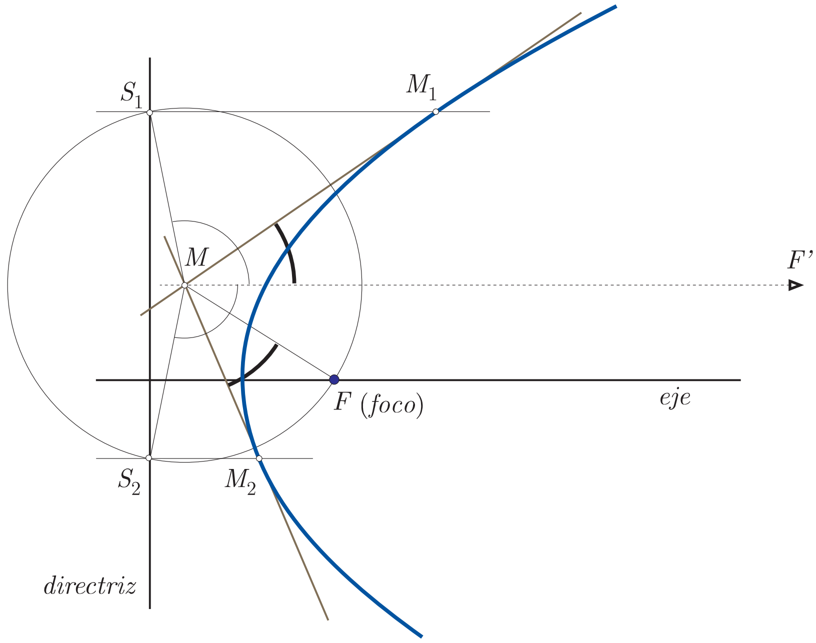
(c) Si se aplica este resultado a una parábola inscrita a un triángulo $\widehat{ABC}$, cuando se toma M en cada uno de los vértices de $\widehat{ABC}$, se tiene que la recta que un vértice (sea por ejemplo A) con el foco y la paralela al eje por A, son conjugadas isogonales, respecto a los lados por A.

(3) La ecuación puntual de una cónica inscrita (cuya matriz asociada es la adjunta de la matriz asociada a la ecuación tangencial) es:

$$p^2x^2 + q^2y^2 + r^2z^2 - 2qryz - 2rpzx - 2pqxy = 0.$$

(4) Si los puntos $P_i(x_i : y_i : z_i)$, $i = 1, 2$, vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, tales que $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$, el punto Q que separa P_1 y P_2 en la razón m/n ($P_1Q : QP_2 = m : n$) es

$$Q(nx_1 + mx_2 : ny_1 + my_2 : nz_1 + mz_2).$$



— — — — — — — — — — — —

Transcripción de la demostración del segundo teorema de Poncelot, dada en la obra de Puig Adam, citada antes:

Admitamos, antes que nada, que el simétrico del foco de una parábola respecto a toda tangente está en la directriz.

Si M es un punto exterior a una parábola, equidista del foco y del simétrico S de éste respecto a una tangente por M. Como además S ha de estar en la directriz, se determinará S como intersección de la directriz con la circunferencia de centro M y radio MF. La mediatriz de FS será una tangente desde M, cuyo punto de contacto estará en la perpendicular a la directriz por S.

De la igualdad de ángulos $\widehat{S_1MF'} = \widehat{F'MS_2}$ se sigue que:

$$\widehat{F'MS_2} = \frac{1}{2}\widehat{S_1MS_2} = \frac{1}{2}\widehat{S_1MF} + \frac{1}{2}\widehat{FMS_2} = \frac{1}{2}\widehat{M_1MM_2} + \frac{1}{2}\widehat{M_1MM_2} = \widehat{M_1MM_2}.$$

El ángulo que hay que girar el ángulo $\widehat{F'MS_2}$ para que coincida con el ángulo $\widehat{M_1MM_2}$ es

$$\widehat{F'MM_1} = \widehat{S_2MM_2} = \widehat{M_2MF}.$$

— — — — — — — — — — — —

<u>NOTAS ADICIONALES (algunas parábolas inscritas):</u>

• Para más información sobre parábolas inscritas a un triángulo puede verse el §11.2 de Paul Yiu.- Introduction to the Geometry of the Triangle (http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps).

• Para un ejemplo de parábolas inscritas como envolventes de rectas, ver las notas al Problema 358 del Laboratorio Virtual de Triángulos con Cabri II (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2135.pdf). Donde además se dan varios enlaces a páginas donde se estudian parábolas inscritas a un triángulo.

• La envolvente de las rectas tales que la razón de la longitud de los segmentos que determinan sobre los lados de $\widehat{ABC}$ es constante, es una parábola inscrita (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejtr2231.pdf).

• Las polares trilineales de los puntos de la recta de Euler envuelven una parábola inscrita de ecuación tangencial (§11.4.4 de Paul Yiu.- Introduction to the Geometry of the Triangle):

$$S_A(S_B - S_C)vw + S_B(S_C - S_A)wu + S_C(S_A - S_B)uv = 0.$$

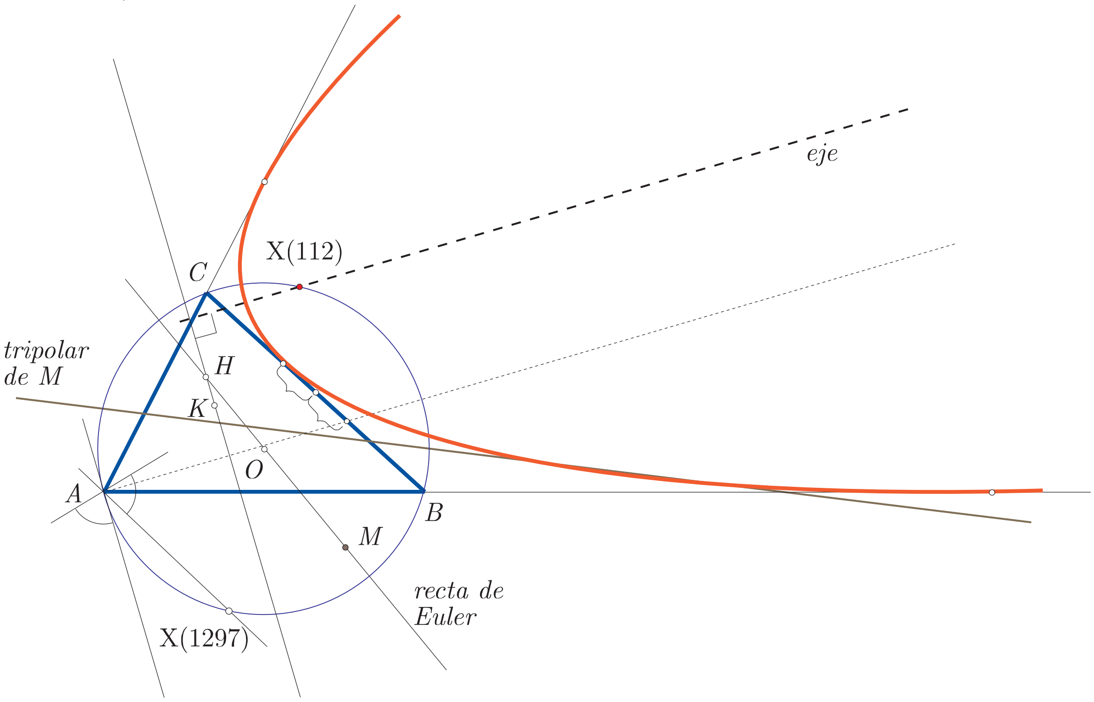
Ya que como la recta de Euler contiene al baricentro $(1 : 1 : 1)$ y al ortocentro $(S_BS_C : S_CS_A : S_AS_B)$, un punto genérico de ella es de la forma $(t + S_BS_C : t + S_CS_A : t + S_AS_B)$, y para hallar la envolvente de las polares trilineales de éstos, debemos eliminar λ y t entre las ecuaciones

$$\lambda u = \frac{1}{t + S_BS_C}, \qquad \lambda v = \frac{1}{t + S_CS_A}, \qquad \lambda w = \frac{1}{t + S_AS_B}.$$

Su foco, isogonal conjugado de su punto del infinito, es (X_{112} en ETC):

$$\left(\frac{a^2}{S_A(S_B - S_C)} : \frac{b^2}{S_B(S_C - S_A)} : \frac{c^2}{S_C(S_A - S_B)}\right).$$

(AppletCabriJava)



El foco es el punto X_{1297}, antipodal en la circunferencia circunscrita del conjugado isogonal del punto del infinito de la recta que para por el ortocentro y el simediano; la dirección del eje es perpendicular a dicha recta; el punto de contacto con el lado BC es el simétrico, respecto a su punto medio, del punto en que la paralela al eje por A corta a BC; los otros puntos de contacto con los lados se determina de forma similar.

Las coordenadas de X_{1297} son:

$$\left(\frac{a^2}{2a^6 - a^4(b^2 + c^2) - (b^2 + c^2)(b^2 - c^2)^2} : \cdots : \cdots\right).$$

• Si sobre los lados BC, CA y AB de $\widehat{ABC}$ se construyen triángulo isosceles con ángulo en la base θ, los vértices X^*, Y^* y Z^* opuestos a sus bases determinan un triángulo $\widehat{X^*Y^*Z^*}$ perspectivo con $\widehat{ABC}$, denominado triángulo de Kiepert. Se tiene (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf#geoba-triangulo-Kiepert) que:

$$X(-a^2 : S_C + S_\theta : S_B + S_\theta), \qquad Y(S_C + S_\theta : -b^2 : S_A + S_\theta), \qquad Z(S_B + S_\theta : S_A + S_\theta : -c^2).$$

Los puntos $BC \cap Y^*Z^*$, $AB \cap Z^*X^*$ y $CA \cap Z^*X^*$ son, respectivamente:

$$\left(0 : -S^2 + 2b^2 S_\theta - S_\theta^2 : S^2 - 2c^2 S_\theta + S_\theta^2\right),$$
$$\left(S^2 - 2a^2 S_\theta + S_\theta^2 : 0 : -S^2 + 2c^2 S_\theta - S_\theta^2\right),$$
$$\left(-S^2 + 2a^2 S_\theta - S_\theta^2 : S^2 - 2b^2 S_\theta + S_\theta^2 : 0\right).$$

Estos puntos están en el eje de perspectividad de $\widehat{ABC}$ y $\widehat{X^*Y^*Z^*}$ de coordenadas tangenciales:

$$(u : v : w) = \left(\frac{1}{S^2 + 2a^2 - S_\theta^2} : \frac{1}{S^2 + 2b^2 - S_\theta^2} : \frac{1}{S^2 + 2c^2 - S_\theta^2}\right).$$

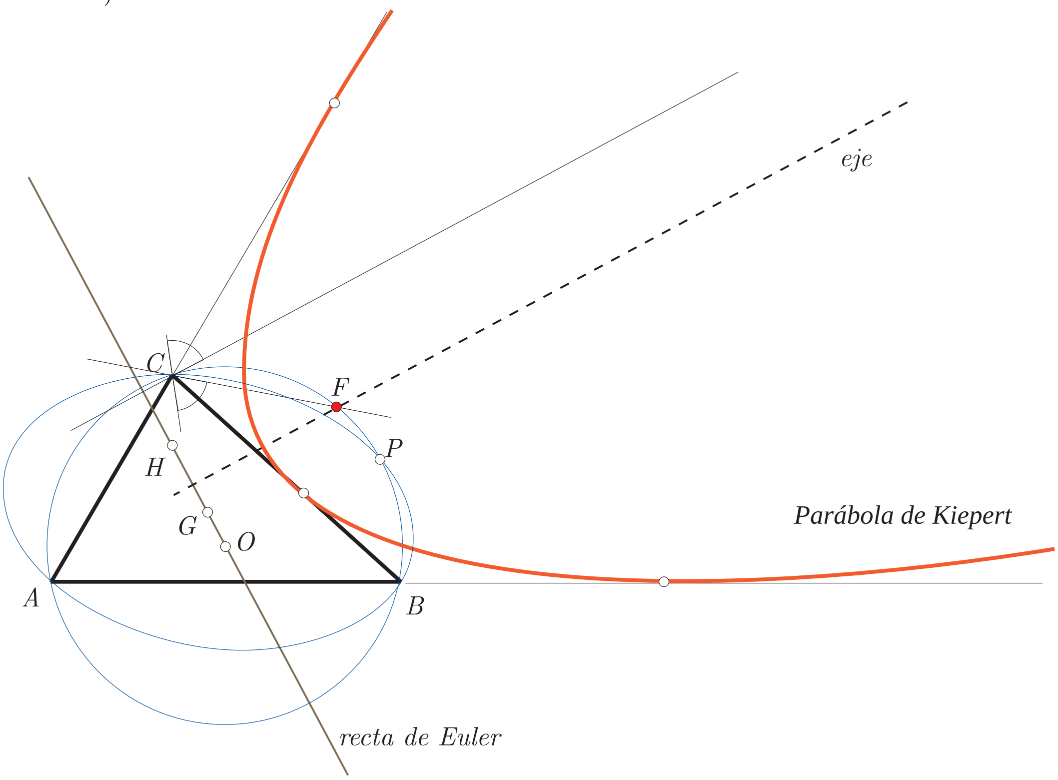
La envolvente de esos ejes es una parábola inscrita, cuya ecuación tangencial se obtiene eliminando S_θ entre esta relaciones:

$$(b^2 - c^2)vw + (c^2 - a^2)wu + (a^2 - b^2)uv = 0.$$

Se trata de la parábola de Kiepert de perspector el punto de Steiner, de directriz la recta de Euler y su foco (el otro punto de corte de la circunferencia circunscrita con la tangente en el punto de Steiner a la elipse circunscrita de Steiner, X_{110} en ETC) es:

$$\left(\frac{a^2}{b^2 - c^2} : \frac{b^2}{c^2 - a^2} : \frac{c^2}{a^2 - b^2}\right).$$

(AppletCabriJava)



• La parábola inscrita de foco el punto de Steiner tiene de ecuación tangencial:

$$a^2(b^2-c^2)vw+b^2(c^2-a^2)wu+c^2(a^2-b^2)uv=0.$$

Su perspector es el punto X_{670} de ETC (punto donde la tangente en el punto de Steiner a la circunferencia circunscrita vuelve a cortar a la elipse circunscrita de Steiner):

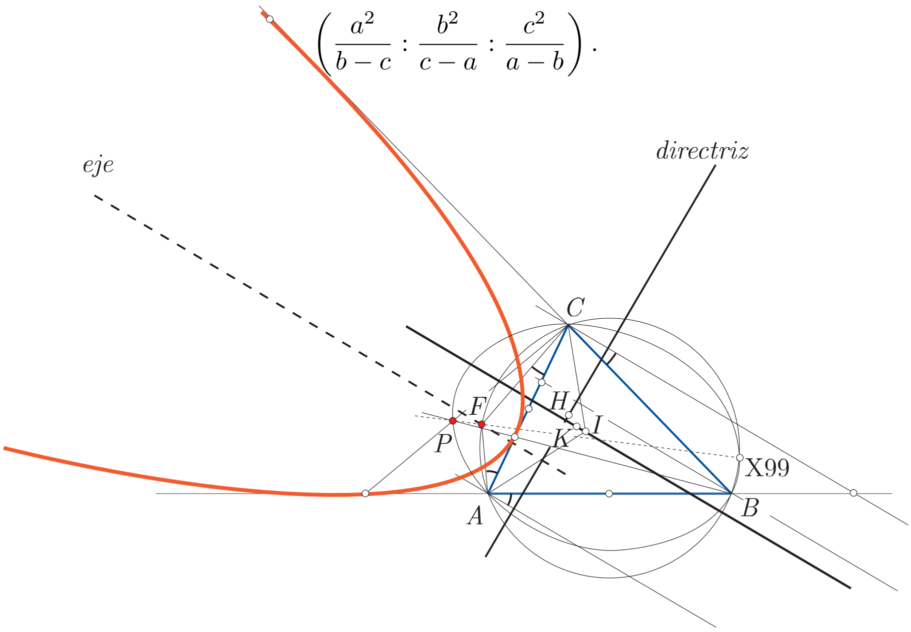
$$\left(\frac{1}{a^2(b^2-c^2)}:\frac{1}{b^2(c^2-a^2)}:\frac{1}{c^2(a^2-b^2)}\right).$$

• La parábola inscrita de foco el isogonal conjugado del punto del infinito de la recta que pasa por el incentro y el simediano, tiene por ecuación tangencial

$$(b-c)vw+(c-a)wu+(a-b)uv=0.$$

Se trata de la parábola inscrita de Yff y su foco es (X_{101} en ETC, conjugado isogonal del punto del infinito de la recta que pasa por el incentro y el simediano):

$$\left(\frac{a^2}{b-c}:\frac{b^2}{c-a}:\frac{c^2}{a-b}\right).$$



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2361.pdf