Problema 506. Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea P un punto interior al mismo y $\Lambda(P)$ la suma de las distancias de P a sus lados. Siendo G el baricentro del triángulo y O su circuncentro demostrar que:

(a) $\dfrac{2(5R-r)r}{3R} \leq \Lambda(G) \leq \dfrac{2(R+r)^2}{3R}$

(b) $\Lambda(G) \leq \Lambda(O)$

Propuesto por Vicente Vicario García,I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.

Adottiamo le notazioni usuali, ossia denotiamo con a, b, c i lati BC, CA, AB, con A, B, C gli angoli, con G il baricentro, con O il circoncentro, con H l'ortocentro, con s il semiperimetro, con R il circonraggio, con r l'inraggio e con Δ l'area del triangolo $\triangle ABC$. Inoltre se P è un punto interno al triangolo, indichiamo con P_a, P_b, P_c le sue proiezioni sui lati BC, CA, AB.

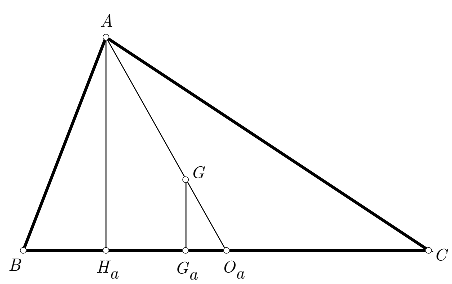

FIGURA 1

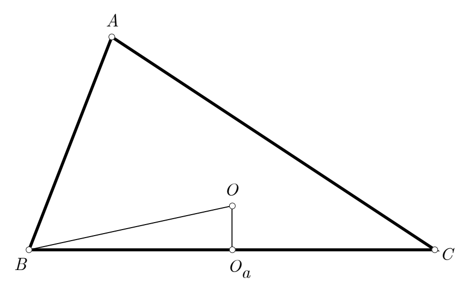

FIGURA 2

(a) Dalla similitudine dei triangoli AH_aO_a e GG_aO_a abbiamo che:

$$GG_a : AH_a = GO_a : AO_a = 1 : 3 \qquad \Longrightarrow \qquad GG_a = \frac{1}{3}h_a$$

ed analoghe relazioni valgono per GG_b, GG_c.

Allora, tenendo conto dell'identità $ab + bc + ca = s^2 + 4Rr + r^2$, abbiamo:

$$\begin{aligned} \Lambda(G) &= \frac{1}{3}(h_a + h_b + h_c) = \frac{1}{3}\left(\frac{2\Delta}{a} + \frac{2\Delta}{b} + \frac{2\Delta}{c}\right) = \\ &= \frac{1}{3}\frac{abc}{2R}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{6R} \end{aligned}$$

e la disuguaglianza richiesta equivale a:

$$4(5R - r)r \leq s^2 + 4Rr + r^2 \leq 4(R + r)^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$16Rr - 5r^2 \leq s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \tag{1}$$

La (1) discende dalle disuguaglianze di Blundon [1]

$$2R^2 + 10Rr - r^2 - 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \leq s^2 \tag{2}$$

$$s^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R-2r) + 2(R-2r)\sqrt{R(R-2r)} \tag{3}$$

Infatti essendo $\sqrt{R(R-2r)} \leq R - r$, dalla (2) e la (3) abbiamo

$$s^2 \geq 2R^2 + 10Rr - r^2 - (R-r)2(R-2r) = 16Rr - 5r^2$$

$$s^2 \leq 2R^2 + 10Rr - r^2 + (R-r)2(R-2r) = R^2 + 4Rr + 3r^2$$

e la disuguaglianza (a) è provata. $\square$

(b) Tenendo conto della nota relazione

$$\cos A + \cos B + \cos C = \frac{R+r}{R}$$

abbiamo:

$$\Lambda(O) = R\left(\cos A + \cos B + \cos C\right) = R + r$$

Allora, essendo

$$\Lambda(G) = \frac{s^2 + 4Rr + r^2}{6R}$$

la disuguaglianza richiesta equivale a:

$$\frac{s^2 + 4Rr + r^2}{6R} \leq R + r \qquad \Longleftrightarrow$$

$$s^2 + 4Rr + r^2 \leq 6R^2 + 6Rr \qquad \Longleftrightarrow$$

$$s^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2 \tag{4}$$

La (4) discende dalla (1) e dalla disuguaglianza di Eulero dato che

$$R \geq 2r \qquad \Rightarrow$$

$$R - r \geq r \qquad \Rightarrow$$

$$R(R-r) \geq 2r^2 \qquad \Rightarrow$$

$$R^2 \geq Rr + 2r^2 \qquad \Rightarrow$$

$$4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2 \qquad \Rightarrow$$

$$s^2 \leq 4R^2 + 4Rr + 3r^2 \leq 6R^2 + 2Rr - r^2$$

$\square$

[1] W. J. Blundon, Inequalities Associated with the Triangle, Can. Math. Bull. 8 (1965), 615-626. Vedere anche http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=164095