Problema 506 de *triánguloscabri*. *Sea ABC un triángulo acutángulo. Sea P un punto interior al mismo y $\Lambda(P)$ la suma de las distancias de P a sus lados. Siendo G el baricentro del triángulo y O su circuncentro demostrar que:*

(*a*) $\dfrac{2(5R-r)r}{3R} \leqslant \Lambda(G) \leqslant \dfrac{2(R+r)^2}{3R}$.

(*b*) $\Lambda(G) \leqslant \Lambda(O)$.

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Si $P = (u : v : w)$ es un punto interior al triángulo ABC y P_a es la proyección de P sobre el lado BC, y si llamamos S al área del triángulo ABC, entonces

$$\frac{u}{u+v+w} = \frac{(PBC)}{(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot BC \cdot PP_a}{(ABC)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot a \cdot PP_a}{S} \Rightarrow PP_a = \frac{2Su}{a(u+v+w)}.$$

Así obtenemos la fórmula:

$$\Lambda(P) = PP_a + PP_b + PP_c = \frac{2S}{u+v+w}\left(\frac{u}{a}+\frac{v}{b}+\frac{w}{c}\right).$$

Usaremos las fórmulas establecidas por los siguientes lemas, donde s el semiperímetro del triángulo.

Lema 1. *El área de un triángulo viene dada por las fórmulas*

$$S = sr = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \frac{abc}{4R}.$$

Lema 2. *En un triángulo ABC, con la notación habitual,*

$$ab + bc + ca = s^2 + r^2 + 4Rr.$$

Demostración. Usando las fórmulas del **Lema 1** tenemos:

$$\begin{aligned}
s^2 + r^2 + 4Rr =& s^2 + \frac{S^2}{s^2} + 4\cdot\frac{abc}{4S}\cdot\frac{S}{s} = \\
=& s^2 + \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} + \frac{abc}{s} = \\
=& s^2 + \frac{s^3-(a+b+c)s^2+(ab+bc+ca)s-abc}{s} + \frac{abc}{s} = \\
=& \frac{s^3+s^3-2s^3+(ab+bc+ca)s-abc+abc}{s} = \\
=& ab+bc+ca.
\end{aligned}$$

Desigualdad de Schur. *Si a, b, y c son números reales no negativos y $k \geqslant 1$ es real, entonces se cumple*

$$a^k(a-b)(a-c)+b^k(b-c)(b-a)+c^k(c-a)(c-b) \geqslant 0.$$

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \geqslant b \geqslant c$. Reordenando, lo que queremos probar es que

$$(a-b)\left(a^k(a-c)-b^k(b-c)\right)+c^k(a-c)(b-c) \geqslant 0,$$

y esto se cumple ya que todos los términos del primer miembro son positivos.

Para $k=1$ obtenemos la desigualdad

$$a^3+b^3+c^3+3abc \geqslant a^2b+a^2c+b^2c+b^2a+c^2a+c^2b. \tag{1}$$

Lema 3. *En un triángulo con lados a,b,c se cumple la desigualdad $2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2) \geqslant 3(a^3+b^3+c^3+3abc)$. La igualdad se cumple si y solo si el triángulo es equilátero.*

Demostración. Si aplicamos las sustituciones de Ravi ($a=y+z, b=z+x, c=x+y$), obtenemos la desigualdad de Schur.

$$\begin{aligned}&2(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2\right)-3\left(a^3+3bca+b^3+c^3\right)\\=&-a^3-b^3-c^3+2a^2b+2a^2c+2b^2a+2b^2c+2c^2a+2c^2b-9abc\\=&2(x^3+y^3+z^3+3xyz-x^2y-x^2z-y^2x-y^2z-z^2x-z^2y) \geqslant 0.\end{aligned}$$

Lema 4 (**Desigualdad de Steinig**)**.** *En un triángulo se cumple la desigualdad $s^2 \geqslant 16Rr-5r^2$.*

Demostración. Usando el **Lema 1** y el **Lema 2** en la desigualdad del **Lema 3**,

$$\begin{aligned}0 \geqslant& 3(a^3+b^3+c^3+3abc)-2(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)\\=&3\left((2s)^3-3(2s)(s^2+r^2+4Rr)+6(4Rrs)\right)-2(2s)(2(s^2-r^2-4Rr))\\=&2s\left(12s^2-9s^2-9r^2-12Rr+12Rr-4s^2+4r^2+16Rr\right)\\=&2s(16Rr-s^2-5r^2) \Rightarrow s^2 \geqslant 16Rr-5r^2.\end{aligned}$$

Lema 5 (**Desigualdad de Gerretsen**). *En un triángulo se cumple la desigualdad* $s^2 \leqslant 4R^2 + 3r^2 + 4Rr$.

Demostración. Es conocido que $4R^2+3r^2+4Rr-s^2$ es la distancia al cuadrado entre el incentro y el ortocentro. Por ello, daremos aquí otra demostración de esta desigualdad, sin todos los detalles. Teniendo en cuenta el **Lema 1** y el **Lema 2** resulta que los lados a, b, c del triángulo ABC son soluciones de la ecuación

$$\lambda^3 - 2s\lambda^2 + (s^2 + r^2 + 4Rr)\lambda - 4sRr = 0.$$

Para que esta ecuación cúbica tenga tres soluciones reales, es necesario que su discriminante sea positivo, y esto equivale a su vez a que la expresión

$$s^4 + (2r^2 - 20rR - 4R^2)s^2 + r(4R + r)^3$$

sea negativa, y para ello es necesario que

$$\begin{aligned} s^2 \leqslant & 2R^2 + 10Rr - r^2 + 2(R - 2r)\sqrt{R^2 - 2Rr} \\ = & 4R^2 + 4Rr + 3r^2 - \left((R - 2r) - \sqrt{R(R - 2r)}\right)^2 \\ \leqslant & 4R^2 + 4Rr + 3r^2. \end{aligned}$$

Procedamos ya a resolver el apartado (a). Para $P = G = (1 : 1 : 1)$, tenemos

$$\begin{aligned} \Lambda(G) = & \frac{2S}{3}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) = \frac{2S}{3} \cdot \frac{bc + ca + ab}{abc} = \frac{2S}{3} \cdot \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{4SR} \\ = & \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{6R}. \end{aligned}$$

Sustituyendo esta fórmula en las desigualdades propuestas en el apartado (a), obtenemos

$$\begin{aligned} & \frac{10Rr - 2r^2}{3R} \leqslant \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{6R} \leqslant \frac{2R^2 + 2r^2 + 4Rr}{3R} \\ \Leftrightarrow & 20Rr - 4r^2 \leqslant s^2 + r^2 + 4Rr \leqslant 4R^2 + 4r^2 + 8Rr \\ \Leftrightarrow & 16Rr - 5r^2 \leqslant s^2 \leqslant 4R^2 + 3r^2 + 4Rr, \end{aligned}$$

que son las desigualdades de Steinig y Gerretsen, respectivamente, lo cual responde al apartado (a).

Para responder al apartado (b) tenemos en cuenta el resultado conocido (teorema de Carnot)

$$\Lambda(O) = R\cos A + R\cos B + R\cos C = R + r,$$

de manera que

$$\Lambda(O) - \Lambda(G) = R + r - \frac{s^2 + r^2 + 4Rr}{6R} = \frac{6R^2 + 2Rr - r^2 - s^2}{6R}.$$

Tenemos que demostrar entonces que $s^2 \leqslant 6R^2 + 2Rr - r^2$, y para ello, teniendo en cuenta la desigualdad de Gerretsen, será suficiente probar que

$$\begin{aligned} & 4R^2 + 3r^2 + 4Rr \leqslant 6R^2 + 2Rr - r^2 \\ \Leftrightarrow & 2R^2 - 2Rr - 4r^2 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & R^2 - Rr - 2r^2 \geqslant 0 \\ \Leftrightarrow & (R - 2r)(R + r) \geqslant 0, \end{aligned}$$

siendo cierta la última desigualdad en virtud de la desigualdad $R \geqslant 2r$ de Euler-Chapple.