

Problema 507 de *triángulos cabri*. Construir un triángulo conociendo los segmentos (de las respectivas mediatrices) que unen el circuncentro con los puntos medios de los lados correspondientes.

Propuesto por Francisco Jara Albarrán.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Este problema es muy parecido en su enunciado al problema 435 de esta revista. Allí usamos el siguiente lema:

Lema 1. *Los cosenos de los ángulos del triángulo ABC cumplen*

$$\begin{aligned}\cos A + \cos B + \cos C &= \frac{R + r}{R} \\ \cos A \cos B + \cos A \cos C + \cos B \cos C &= \frac{s^2 + r^2 - 4R^2}{4R^2} \\ \cos A \cos B \cos C &= \frac{s^2 - (2R + r)^2}{4R^2}\end{aligned}$$

En el caso del triángulo acutángulo los segmentos del enunciado son

$$u = OD = R \cos A, \quad v = OE = R \cos B, \quad w = OF = R \cos C.$$

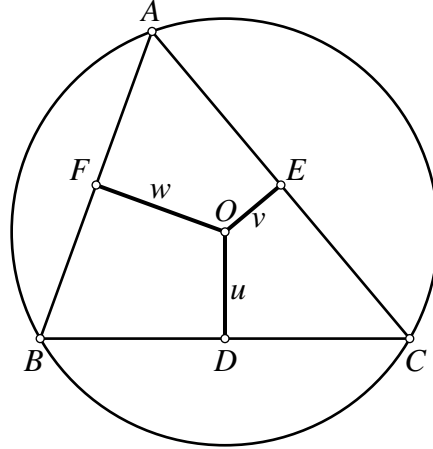


FIGURA 1

Teniendo en cuenta el Lema 1, se cumplirán las relaciones

$$\begin{aligned}R + r &= \sigma_1, \\ s^2 + r^2 - 4R^2 &= 4\sigma_2, \\ R(s^2 - (2R + r)^2) &= 4\sigma_3\end{aligned}$$

siendo $\sigma_1 = u + v + w$, $\sigma_2 = vw + wu + uv$ y $\sigma_3 = uvw$, de donde podemos eliminar r y s para obtener que R es solución de la ecuación

$$R^3 + (2\sigma_2 - \sigma_1^2)R - 2\sigma_3 = 0,$$

es decir la ecuación

$$R^3 - (u^2 + v^2 + w^2)R - 2uvw = 0. \quad (1)$$

Si las longitudes u , v , w son conocidas, podemos resolver esta ecuación y hallar el radio R de la circunferencia circunscrita. A partir de R , los lados del triángulo son

$$a = 2\sqrt{R^2 - u^2}, \quad b = 2\sqrt{R^2 - v^2}, \quad c = 2\sqrt{R^2 - w^2}.$$

Algunas observaciones sobre la ecuación (1):

1. Para hallar los triángulos obtusángulos sólo tenemos que cambiar uno de los valores u, v, w por su opuesto, resultando la ecuación

$$R^3 - (u^2 + v^2 + w^2)R + 2uvw = 0. \quad (2)$$

2. Ambas ecuaciones (1) y (2) tienen el discriminante

$$4(u^6 + v^6 + w^6) + 12(u^4v^2 + u^4w^2 + v^4u^2 + v^4w^2 + w^2u^2 + w^2v^2) - 84u^2v^2w^2,$$

que puede expresarse, en notación del teorema de Muirhead,

$$4 \left(\frac{1}{2}[6, 0, 0] + 3[4, 2, 0] - \frac{21}{6}[2, 2, 2] \right) = \frac{2}{3} (3[6, 0, 0] + 18[4, 2, 0] - 21[2, 2, 2]).$$

Esta expresión es positiva si u, v, w son números distintos, por lo que en ese caso las dos ecuaciones tienen siempre tres raíces reales. Además, si sustituimos R por u en los polinomios cúbicos de (1) y (2) obtenemos, respectivamente, las cantidades $-u(u+v)^2$ y $-u(u-v)^2$, que son números negativos, por lo que cada ecuación tendrá siempre al menos una raíz una raíz R mayor que u (y por simetría, también mayor que v y w).

3. Cuando en la ecuación (1) consideramos $v = w$, que corresponderá a un triángulo isósceles ABC con $AB = AC$, la ecuación se puede factorizar como $(R + u)(R^2 - uR - 2v^2) = 0$. La raíz positiva de $R^2 - uR - 2v^2$ con procedimiento conocido:

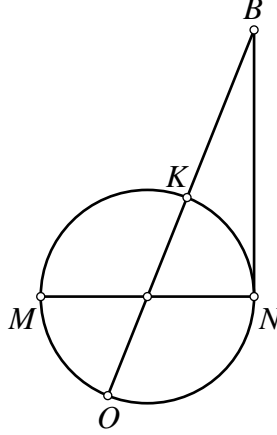


FIGURA 2

Sobre un segmento $MN = u$ levantamos una perpendicular $NB = \sqrt{2}v$. Trazamos la circunferencia con diámetro MN y la recta que une B con el centro de la circunferencia, que corta a ésta en los puntos K y O . Entonces se cumplen:

$$\left. \begin{array}{l} BO \cdot BK = BN^2 = 2v^2 \\ BO - BK = OK = MN = u \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} BO \cdot (-BK) = -2v^2 \\ BO + (-BK) = u \end{array} \right\},$$

así que BO y BK son las soluciones de la ecuación $R^2 - uR - 2v^2 = 0$ y la longitud $R = OB$ es el radio de la circunferencia buscada.

Una vez construido el radio R podemos construir también el triángulo buscado.

La construcción completa está detallada en la Figura 3.

- Sobre una recta fijamos el segmento $MN = u$, y a continuación un segmento $NP = v$. Por el punto N levantamos una perpendicular NB igual a la diagonal del cuadrado.
- Unimos B con el centro de la circunferencia con diámetro MN y prolongamos hasta cortar a ésta en O .

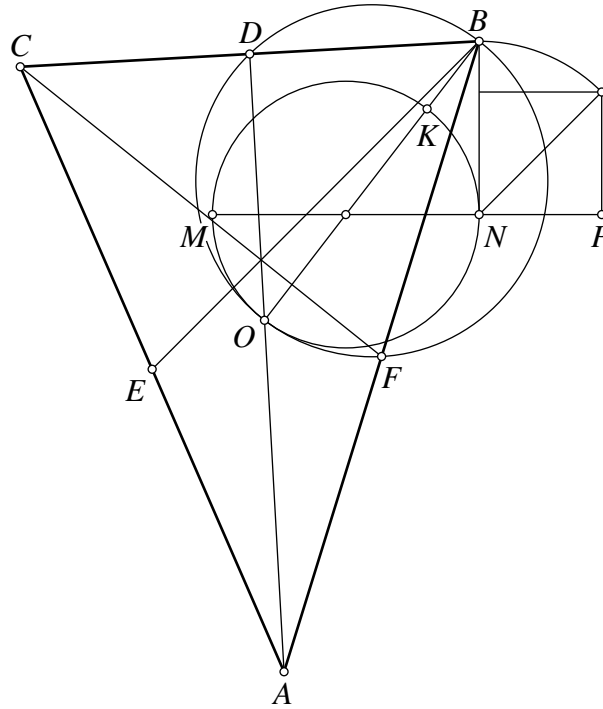


FIGURA 3

- Trazamos la circunferencia con diámetro BO y, a lados distintos, señalamos los puntos D y F tales que $OD = u$ y $OF = v$.
- Los vértices A y C del triángulo buscado son los punto simétricos de B respecto de F y C , respectivamente.

4. En el caso general, al tratarse de una ecuación de tercer grado en R , la solución no es, en general, construible con regla y compás. Una alternativa es recurrir a una solución numérica.

```
SolucionesCubica [m_, n_] := Map[Re, N[R /. Solve[R3 + m R + n == 0, R]]];
```

```
ResolverProblema [{u_, v_, w_}] := Map[2 { $\sqrt{\#^2 - u^2}$ ,  $\sqrt{\#^2 - v^2}$ ,  $\sqrt{\#^2 - w^2}$ } &,
  Select[Join[
    SolucionesCubica [-u2 - v2 - w2, -2 u v w],
    SolucionesCubica [-u2 - v2 - w2, 2 u v w]], # > Max[u, v, w] &]]
```

Para hallar los triángulos solución para $u = 2$, $v = 3$ y $c = 4$ hacemos:

```
ResolverProblema [{2, 3, 4}]
```

```
{{11.472, 10.5644, 9.14367}, {7.3589, 5.84409, 2.48061}}
```