Problema 508. Sea ABC un triángulo, I su incentro y r el radio de su circunferencia inscrita. Demostrar que se cumplen las siguientes desigualdades:

$$AI + BI + CI \geq 6r \cdot \sqrt[3]{\sec\frac{A-B}{4} \cdot \sec\frac{B-C}{4} \cdot \sec\frac{C-A}{4}} \geq 6r$$

Propuesto por Vicente Vicario García,I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa. Premettiamo il seguente[1]:

Lemma. Se A, B, C sono gli angoli di un triangolo sussiste la disuguaglianza

$$\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2} \geq 8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

Dimostrazione. Dati tre numeri reali positivi a, b, c dalla disuguaglianza tra le medie aritmetica e geometrica si ricava $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ e, moltiplicando le disuguaglianze analoghe per $b+c$ e $c+a$, abbiamo:

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc \qquad \Leftrightarrow$$

$$\frac{a+b}{c} \cdot \frac{b+c}{a} \cdot \frac{c+a}{b} \geq 8 \tag{1}$$

Allora, dal teorema dei seni, segue che

$$\frac{a+b}{c} = \frac{\sin A + \sin B}{\sin C} = \frac{2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}} \tag{2}$$

La disuguaglianza voluta si ottiene sostituendo la (2) e le altre simili relazioni nella (1). ■

Veniamo ora alla soluzione del problema. Essendo $0 \leq \frac{|A-B|}{4} \leq \frac{|A-B|}{2} \leq 90°$ abbiamo:

$$\cos\frac{A-B}{4} \geq \cos\frac{A-B}{2}$$

Moltiplicando le analoghe disuguaglianze che si ottengono per gli angoli $B-C$ e $C-A$ otteniamo:

$$\cos\frac{A-B}{4} \cdot \cos\frac{B-C}{4} \cdot \cos\frac{C-A}{4} \geq \cos\frac{A-B}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \cdot \cos\frac{C-A}{2}$$

o, equivalentemente

$$\sec\frac{A-B}{2} \cdot \sec\frac{B-C}{2} \cdot \sec\frac{C-A}{2} \geq \sec\frac{A-B}{4} \cdot \sec\frac{B-C}{4} \cdot \sec\frac{C-A}{4} \tag{3}$$

Per dimostrare la disuguaglianza richiesta, tenuto conto della (3), sarà sufficiente dimostrare che:

$$AI + BI + CI \geq 6r \cdot \sqrt[3]{\sec\frac{A-B}{2} \cdot \sec\frac{B-C}{2} \cdot \sec\frac{C-A}{2}} \tag{4}$$

[1] Crux Mathematicorum, 7(1981)303

Dalle note relazioni

$$AI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} \qquad , \qquad BI = \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} \qquad , \qquad CI = \frac{r}{\sin\frac{C}{2}}$$

applicando la disuguaglianza tra le medie aritmetica e geometrica ed il Lemma precedente otteniamo:

$$\begin{aligned} AI + BI + CI = \frac{r}{\sin\frac{A}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{B}{2}} + \frac{r}{\sin\frac{C}{2}} \geq \\ \geq 6r \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}} \geq \\ \geq 6r\sqrt[3]{\cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}} \end{aligned}$$

e la disuguaglianza (4) è provata. □