Problema 508 de *triánguloscabri*. *Sea un triángulo ABC, I su incentro y r el radio de su circunferencia inscrita. que Demostrar que se cumplen las siguientes desigualdades:*

$$AI + BI + CI \geqslant 6r \cdot \sqrt[3]{\sec\frac{A-B}{4} \cdot \sec\frac{B-C}{4} \cdot \sec\frac{C-A}{4}} \geqslant 6r.$$

Propuesto por Vicente Vicario García.

Solución de Francisco Javier García Capitán

Teniendo en cuenta que

$$AI = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}, \quad BI = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}, \quad CI = \frac{r}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}},$$

la primera desigualad es equivalente a

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} + \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}} \geqslant 6 \cdot \sqrt[3]{\sec\frac{A-B}{4} \cdot \sec\frac{B-C}{4} \cdot \sec\frac{C-A}{4}}.$$

En virtud de la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica será suficiente probar que

$$3\sqrt[3]{\frac{1}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}\frac{C}{2}}} \geqslant 6\sqrt[3]{\sec\frac{A-B}{4} \cdot \sec\frac{B-C}{4} \cdot \sec\frac{C-A}{4}},$$

es decir

$$\cos\frac{A-B}{4} \cdot \cos\frac{B-C}{4} \cdot \cos\frac{C-A}{4} \geqslant 8 \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2},$$

y teniendo en cuenta el decrecimiento de la función coseno en $[0, \pi]$, será suficiente probar que

$$\cos\frac{A-B}{2} \cdot \cos\frac{B-C}{2} \cdot \cos\frac{C-A}{2} \geqslant 8 \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2}. \tag{1}$$

Ahora, usando el teorema de los senos generalizado, observamos que

$$\begin{aligned}\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2 \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2}} =& \frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2 \cdot \cos\frac{B+C}{2}} = \frac{\cos\frac{B-C}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B+C}{2}}{2 \cdot \cos\frac{B+C}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B+C}{2}} \\ =& \frac{\frac{1}{2}(\operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C)}{\operatorname{sen}(B+C)} = \frac{\frac{1}{2}(\operatorname{sen}B + \operatorname{sen}C)}{\operatorname{sen}A} = \frac{b+c}{2a},\end{aligned}$$

y entonces, usando la desigualdad entre las medias aritmética y geométrica,

$$\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{C-A}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{B}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}} = \frac{b+c}{2a} \cdot \frac{c+a}{2b} \cdot \frac{a+b}{2c} \geqslant \frac{\sqrt{bc}}{a} \cdot \frac{\sqrt{ca}}{b} \cdot \frac{\sqrt{ab}}{c} = 1,$$

lo que demuestra (1), y por tanto la primera desigualdad del enunciado.

Respecto de la segunda desigualdad del enunciado, no hay nada que probar, ya que para cualquier ángulo agudo α se cumple que $\sec\alpha \geqslant 1$.