Sean $\widehat{ABC}$ un triángulo, P un punto y D, E y F los puntos en que las cevianas de P cortan a los lados BC, CA y AB, respectivamente. Sean los puntos $D' = AP \cap EF, E' = BP \cap FD$ y $F' = CP \cap DE$, $E_a = AE' \cap BC$, $F_a = AF' \cap BC$. Probar que:

$$\frac{CF_a}{F_aD} - \frac{CD}{DB} = \frac{BE_a}{E_aD} - \frac{BD}{DC} = 1.$$

SOLUCIÓN:

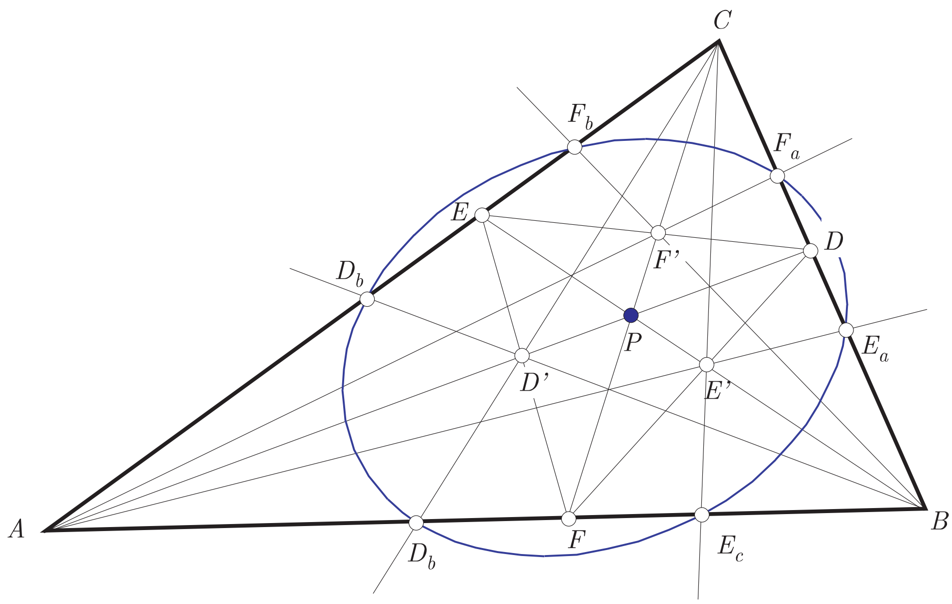
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{509}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid; con el siguiente enunciado [(1)]:

Sea ABC un triángulo, y sea M un punto interior, y Da,Eb y Fc, los pies de las cevianas que pasan por M, y cortan a los lados BC,AC y AB, respectivamente.
Sean los puntos Na= CFc y DaEb, y Pa=BEb y FcDa; prolongamos APa y ANa, hasta que corten a BC en Ha y Ga,respectivamente.

Probar que :
*GaC/DaGa = CDa/DaB + 1 (*cambiado el 19 de mayo, por indicación del profesor Saturnino Campo, a quien se agradece la advertencia)*

S. Dattatreya y R. Dattatreya (2000) An interesting ratio result for triangles.



Haremos una resolución analítica usando coordenadas baricéntricas, lo que nos permitirá (mediante un proceso cíclico) obtener, de paso, la ecuación de una cierta cónica asociada a puntos construidos, así como las coordenadas de su centro.

Sea $P(u : v : w)$ un punto del plano, dado por sus coordenadas baricéntricas respecto a $\widehat{ABC}$. Los pies de las cevianas de P son $D(0 : v : w)$, $E(u : 0 : w)$ y $F(u : v : 0)$. Los pies de las cevianas de P en su triángulo ceviano son $D'(2u : v : w)$, $E'(u : 2v : w)$ y $F'(u : v : 2w)$.
Entonces, las rectas AE' y AF' cortan a BC en $E_a(0 : 2v : w)$ y $F_a(0 : v : 2w)$, respectivamente.

Recordemos que, si los puntos $P_i(x_i : y_i : z_i)$, $i = 1, 2$, vienen dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, tales que $x_1 + y_1 + z_1 = x_2 + y_2 + z_2$, el punto X que separa P_1 y P_2 en la razón m/n ($P_1X/XP_2 = m/n$) es:

$$X(nx_1 + mx_2 : ny_1 + my_2 : nz_1 + mz_2).$$

(1) Hemos modificado la notación para adaptarla al uso más frecuencia.

En el caso que nos ocupa, por ejemplo, para determinar la razón en que F_a divide a CD, $CF_a/F_aD = m/n$, debemos resolver el sistema:

$$\lambda F_a = n(v+w)C + mD,$$

en las variables m, n y λ; resultando $m = \lambda$ y $n = \lambda w/(v+w)$; por lo que

$$\frac{CF_a}{F_aD} = \frac{v+w}{w}.$$

Similarmente, se obtiene (y, en consecuencia, las fórmulas del enunciado) que:

$$\frac{BE_a}{E_aD} = \frac{v+w}{v}, \qquad \frac{CD}{DB} = \frac{v}{w}, \qquad \frac{BD}{DC} = \frac{w}{v}.$$

<u>OBSERVACIONES ADICIONALES:</u>

• Procediendo cíclicamente, obtenemos las coordenadas de los puntos $F_b(u:0:2w)$ y $D_b(2u:0:w)$ en que las rectas BF' y BD' cortan a CA, respectivamente; así como los puntos $D_c(2u:v:0)$ y $E_c(u:2v:0)$ en que las rectas CD' y CE' cortan a AB, respectivamente.

Los seis puntos E_a, F_a, F_b, D_b, D_c y E_c están en una cónica $\mathcal{C}_P$ de ecuación:

$$2\frac{x^2}{u^2} + 2\frac{y^2}{v^2} + 2\frac{z^2}{w^2} - 5\frac{xy}{uv} - 5\frac{yz}{vw} - 5\frac{zx}{wu} = 0.$$

El centro de $\mathcal{C}_P$, polo de la recta del infinito $x+y+z=0$, es

$$C_P\Big(u\big(u-5(v+w)\big) : v\big(v-5(w+u)\big) : w\big(w-5(u+v)\big)\Big).$$

<u>Un caso particular:</u>

Si P es el punto de Nagel, $N_a(b+c-a : c+a-b : a+b-c)$, el centro de $\mathcal{C}_{N_a}$ es

$$C_{N_a}\Big((b+c-a)(b+c-11a) : (c+a-b)(c+a-11b) : (a+b-c)(a+b-11c)\Big).$$

La primera coordenada trilineal exacta [2] de este punto es

$$\frac{2(b+c-a)(b+c-11a)\,\text{área}\widehat{ABC}}{a(13(a^2+b^2+c^2)-22(ab+bc+ca))}.$$

Si se toma como triángulo de referencia el que tiene por longitudes de sus lados $a=6$, $b=9$ y $c=13$, el valor de esta coordenada es

$$\frac{8\sqrt{35}}{15} \simeq 3.1552425509864618894.$$

El punto X_{966} de la Enciclopedia de Centros de un Triángulo de Kimberling (intersección de la recta que pasa por el baricentro y simediano, con la que pasa por el ortocentro y el punto intermedio, X_9) tiene también esta primera coordenada trilineal exacta:

$$X_{966}\big(a^2-2a(b+c)-(b+c)^2 : b^2-2b(c+a)-(c+a)^2 : c^2-2c(a+b)-(a+b)^2\big),$$

$$\frac{2(a^2-2(b+c)a-(b+c)^2)\,\text{área}\widehat{ABC}}{a\,(-a^2-6(b+c)a-(b+c)^2-4bc)} = \frac{8\sqrt{35}}{15}, \qquad \text{si } a=6, b=9, c=13.$$

Resulta de lo expuesto que se presenta una caso de ambigüedad [3] a la hora de averiguar si un centro de un triángulo figura en la ETC (http://faculty.evansville.edu/ck6/encyclopedia/search.html).

---

[2] Si $(x:y:z)$ son las coordenadas baricéntricas homogéneas de un punto, su primera coordenada trilineal exacta es:

$$\frac{2x\,\text{área}\widehat{ABC}}{a(x+y+z)}.$$

[3] Otro ejemplo (sugerido en una comunicación personal por Francisco Javier García Capitán) se tiene para los pares de puntos

$$\left(123a^2+695(b^2+c^2) : 123b^2+695(c^2+a^2) : 123c^2+695(a^2+b^2)\right), \quad \left(123a^2+695bc : 123b^2+695ca : 123c^2+695ab\right).$$

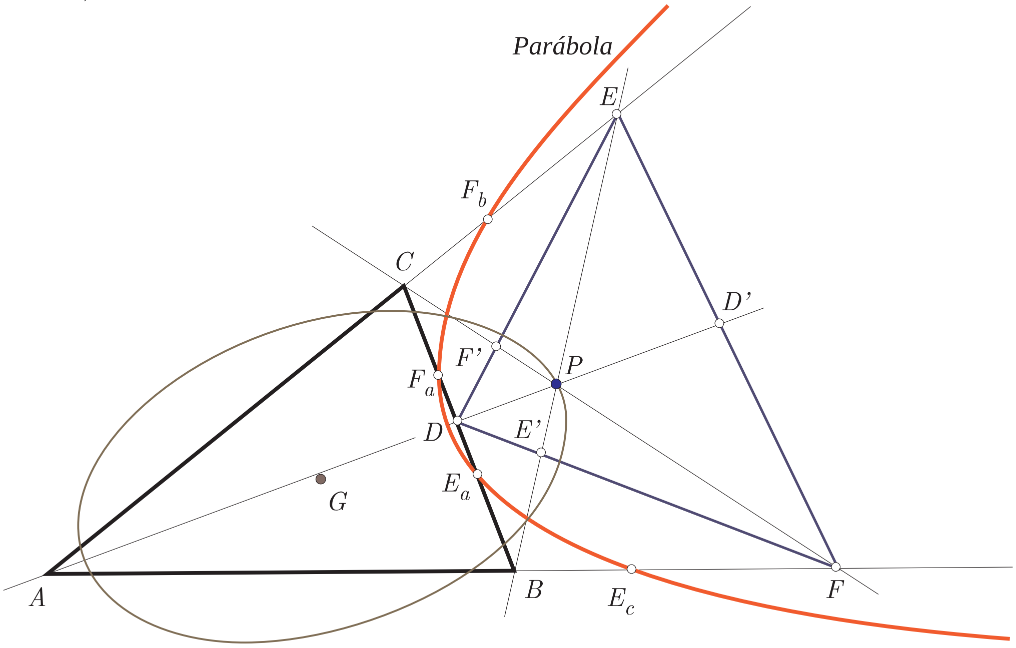
Cuya distancia al lado BC, en el triángulo de Kimberling, es la misma para los dos: $28\sqrt{35}/51 \simeq 3.24804380249$.

Estos puntos son obtenidos a partir de calcular k para que disten lo mismo del lado BC, los centros de primera coordenada baricéntrica $a^2+k(b^2+c^2)$ y a^2+kbc.

• La cónica $\mathcal{C}_P$ es parábola, cuando es tangente a la recta del infinito $x+y+z=0$, o sea cuando P recorre la elipse de ecuación:

$$x^2+y^2+z^2-10xy-10yz-10zx=0.$$

(AppletCabriJava)



http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2362.pdf