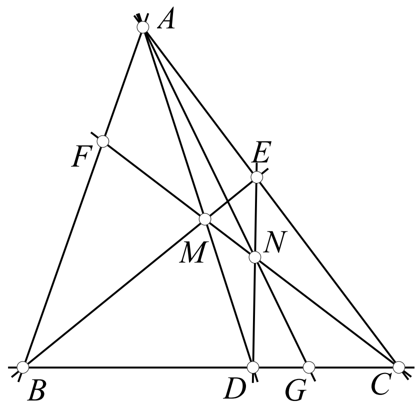
**Problema 509 de *triánguloscabri*.** *Sean $ABC$ un triángulo y $DEF$ el triángulo ceviano de un punto $M$. Consideramos los puntos de intersección $N = CF \cap DE$ y $G = AN \cap BC$. Demostrar que*

$$\frac{GC}{DG} = \frac{DC}{BD} + 1.$$

S. Dattatreya y R. Dattatreya (2000). An interesting ratio result for triangles.
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

*Primera solución de Francisco Javier García Capitán.*



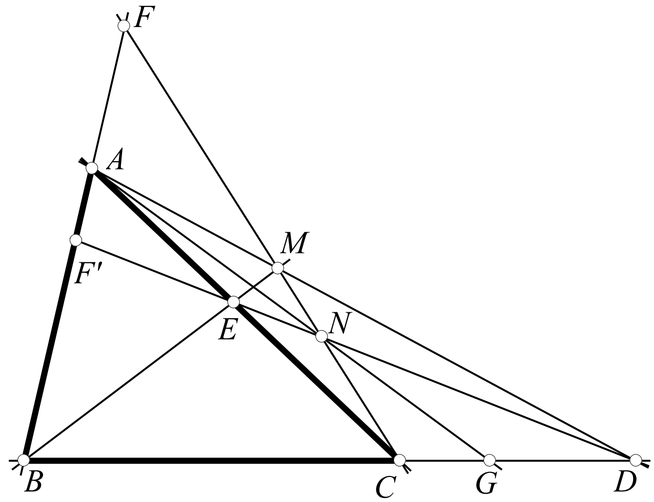

Usaremos en general que si $X$ está sobre la recta $BC$ y $BX : XC = w : v$ entonces $(v + w)X = vB + wC$, y si $AX$ es una ceviana del triángulo $ABC$ entonces $X = (0 : v : w)$.

Ahora, si $M = (u : v : w)$ es $D = (0 : v : w)$ y $E = (u : 0 : w)$, por lo que $DE : w(vx + uy) - uvz = 0$, y por otro lado es $F = (u : v : 0)$, por lo que $CF : vx - uy = 0$. Las rectas $DE$ y $CF$ se cortan en $N = (u : v : 2w)$, así que es $G = (0 : v : 2w)$. Entonces,

$$\left.\begin{array}{l}(v + w)D = vB + wC \\ (v + 2w)G = vB + 2wC\end{array}\right\} \Rightarrow (v + 2w)G = (v + w)D + wC$$

$$\Rightarrow \frac{DG}{GC} = \frac{w}{v + w} \Rightarrow \frac{GC}{DG} = \frac{v + w}{w} = \frac{v}{w} + 1 = \frac{DC}{BD} + 1.$$

*Segunda solución de Francisco Javier García Capitán.*




Observamos, que por construcción, la recta $DE$ corta a $AB$ en el conjugado armónico $F'$ del punto $F$ respecto de $A$ y $B$, es decir, tenemos la razón doble $(ABFF') = -1$. Proyectando desde $N$ la recta $AB$ sobre la recta $BC$ tenemos entonces $(GBCD) = -1$. Usando las propiedades de la razón doble, también es $(CDGB) = -1$ y por tanto,

$$\frac{CG}{GD} = -\frac{CB}{BD} = \frac{BC}{BD} = \frac{BD + DC}{BD} = 1 + \frac{DC}{BD}.$$