

Problema 510 de *triángulos cabri*. Sean ABC un triángulo, P un punto de su plano, M el punto medio de BC y X un punto del segmento MC .

- (a) Hallar el foco de las posibles hipérbolas que pasan por A y P , cuya directriz es la recta BC y cuya excentricidad es la razón $BX : XC$.
- (b) Determinar la posición del punto P para que el problema tenga dos soluciones, una o ninguna.

Propuesto por Francisco Javier García Capitán.

Definición de cónica Por comodidad partiremos de la definición de una cónica como el lugar geométrico de los puntos P cuya distancias a un punto fijo S llamado *foco* y a una recta d llamada *directriz* es una constante e llamada *excentricidad*.

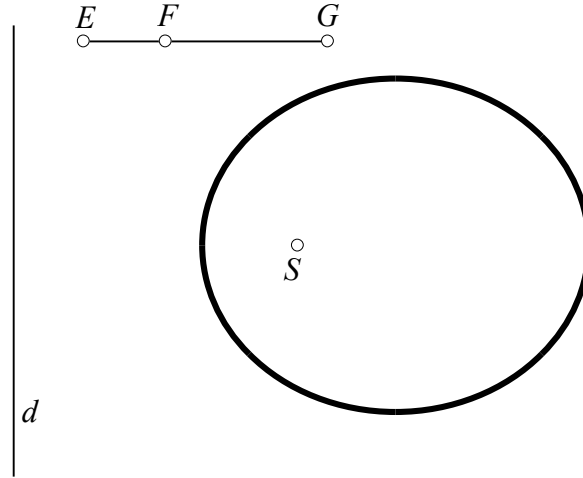


FIGURA 1: Definición de cónica.

Según sea $e > 1$, $e = 1$ o $e < 1$, la cónica es una hipérbola, una parábola o una elipse. En la Figura 1, la excentricidad viene dada por la razón $EF : FG < 1$, por lo que la cónica es una elipse.

Solución del apartado (a) Observemos que no vamos a usar en este apartado que sea $BX > XC$, por lo que el mismo procedimiento sirve en el caso de la parábola y la elipse. Sea S el foco de una cónica solución. Sean U y V las proyecciones ortogonales de A y P sobre la directriz BC . Por la definición de cónica, debe cumplirse que $AS : AU = BX : XC = PS : PV$.

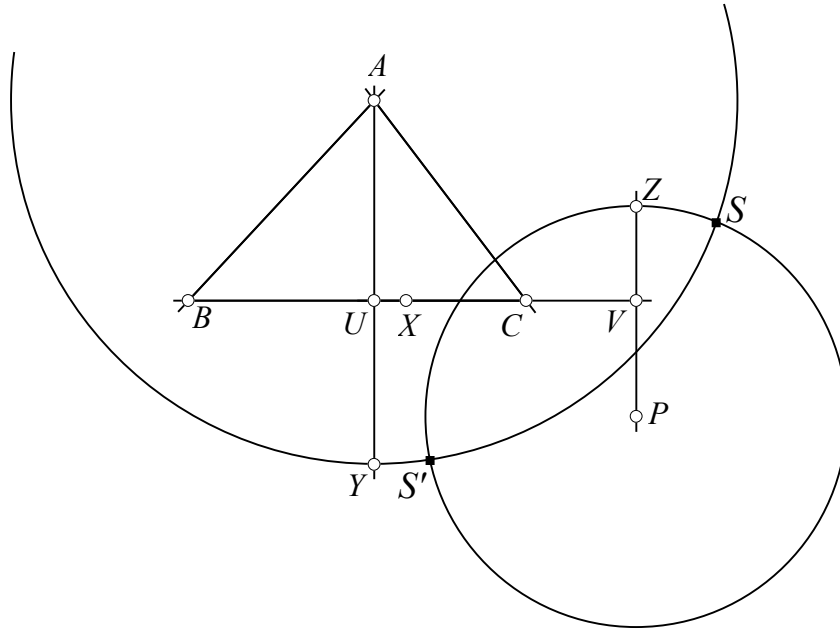


FIGURA 2: Localización de los focos.

Si hallamos sobre las rectas AU y BV los puntos Y y Z tales que $AY : AU = BX : XC = PZ : PV$, y hallamos los puntos de intersección S y S' de las circunferencias con centros A y P , con radios AY y PZ , respectivamente, tendremos

$$AS : AU = BX : XC = PS : PV,$$

$$AS' : AU = BX : XC = PS' : PV,$$

por lo que tanto A como P estarán sobre las cónicas con directriz BC , foco S (o S') y excentricidad $BX : XC$.

Solución del apartado (b) Hemos visto que los posibles focos S y S' se obtienen como intersección de dos circunferencias. Entonces existirá exactamente UNA SOLUCIÓN cuando dichas circunferencias sean tangentes.

Circunferencias tangentes exteriores. En la Figura 3 tenemos el caso en que estas dos circunferencias son tangentes exteriores. Sean A' el punto simétrico de A respecto de BC , y tracemos la recta paralela a BC por este punto A' . Sea P' la proyección ortogonal de P sobre esta paralela. Observemos que esta paralela no depende de la posición del punto P .

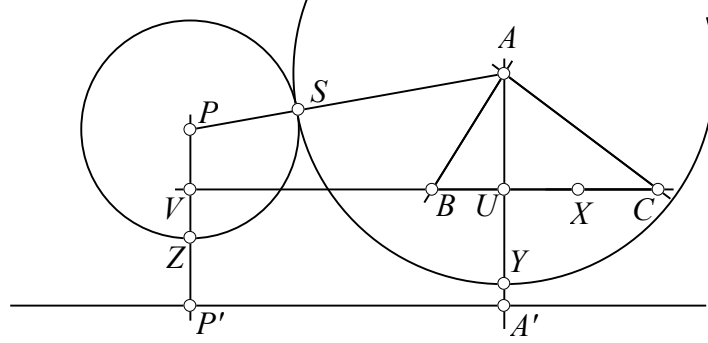


FIGURA 3: Circunferencias tangentes exteriores.

Si las circunferencias son tangentes exteriores, la distancia que separa sus centros, es igual a la suma de los radios.

- Si P y A están al mismo lado de la recta BC ,

$$PA = PS + AS = PZ + AY = e \cdot PV + e \cdot AU = e \cdot (PV + UA') = e \cdot PP'.$$

La relación $PA/PP' = e$ equivale a que el punto P está sobre una CÓNICA CON EXCENTRICIDAD e (POR TANTO UNA HIPÉRBOLA), FOCO A Y DIRECTRIZ d' .

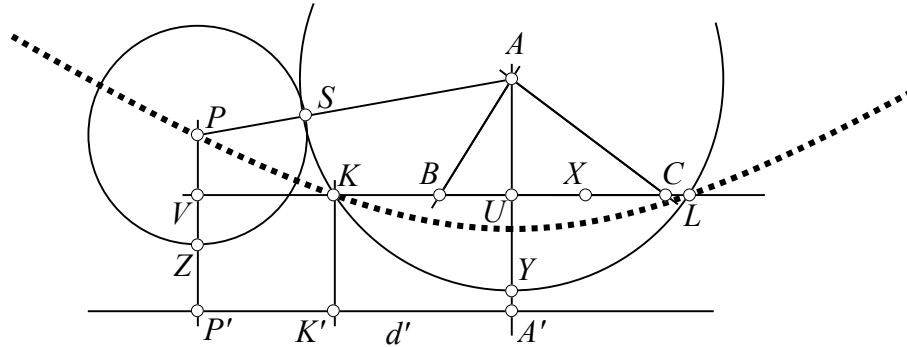


FIGURA 4: Circunferencias tangentes exteriores (I).

Observemos que si K es un punto de intersección de la recta BC con la circunferencia con centro A y radio AY , llamando K' a la proyección de K sobre d' tenemos

$$\frac{KA}{KK'} = \frac{AY}{UA'} = \frac{AY}{AU} = e,$$

por lo que K pertenece a esta hipérbola.

- Cuando P y A están en lados distintos de la recta BC , si llamamos Q a la proyección ortogonal de P sobre AU , tenemos

$$AP = AS + PS = e \cdot (AU + PV) = e \cdot AQ \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = e = \frac{AK}{AU} = \frac{AL}{AU},$$

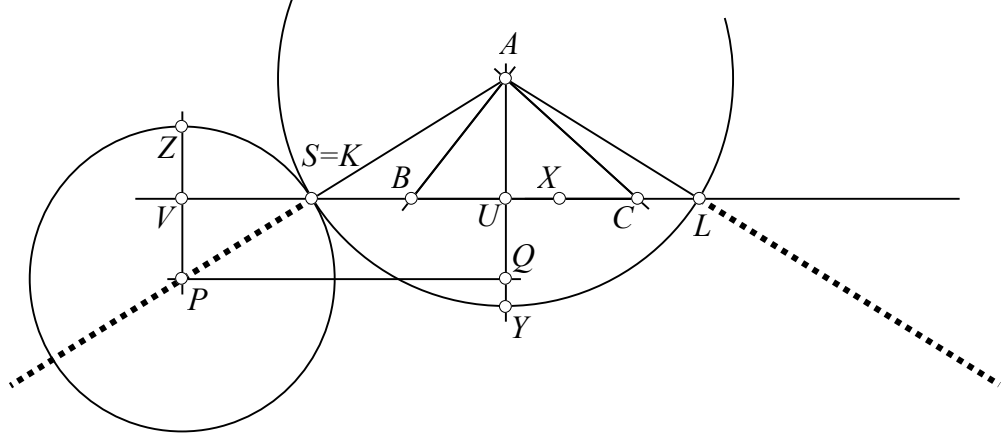


FIGURA 5: Circunferencias tangentes exteriores (II).

Circunferencias tangentes interiores. En este caso, la distancia que separa a los centros A y P será la diferencia de los radios.

- Cuando P y A están en el mismo lado de la recta BC , si llamamos Q a la proyección ortogonal de P sobre AU , tenemos, si $AS > PS$ (Figura 6),

$$AP = AS - PS = e \cdot (AU - PV) = e \cdot AQ \Rightarrow \frac{AP}{AQ} = e = \frac{AK}{AU} = \frac{AL}{AU},$$

Si fuera $AS < PS$ entonces también llegamos a la misma relación $AP = e \cdot AQ$ y en ambos casos P es, como en el caso de las circunferencias tangente exteriores, es un punto de la recta AK o AL , siendo K, L los puntos de intersección de la recta BC con la circunferencia de centro A y radio $AY = e \cdot AU$.

- Cuando P y A están en distinto lado de la recta BC (Figura 7),

$$AP = PS - AS = PZ - AY = e \cdot PV - e \cdot AU = e \cdot (PV - AU) = e \cdot PP',$$

es decir P está en la misma hipérbola que la obtenida para el caso de las circunferencias tangentes exteriores.

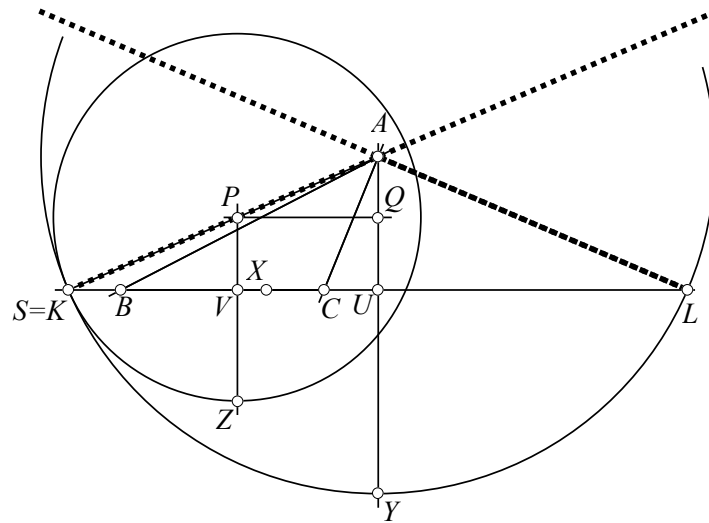


FIGURA 6: Circunferencias tangentes interiores (I).

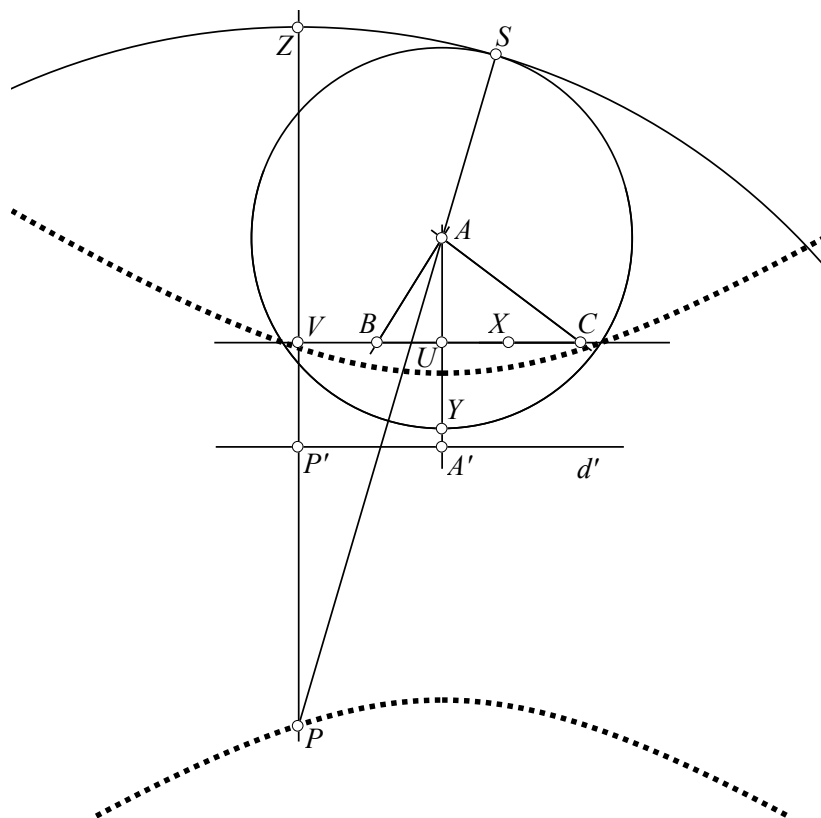


FIGURA 7: Circunferencias tangentes interiores (II).

Las ocho regiones Las dos rectas AK y AL y la hipérbola con foco A , directriz d' y excentricidad e dividen el plano en ocho regiones. En cada una de ellas habrá, por continuidad, dos soluciones, o ninguna. Tal como están nombradas en la Figura 8, hay dos soluciones cuando P está en las regiones 2a, 2b o 5, y no hay solución en los demás casos.

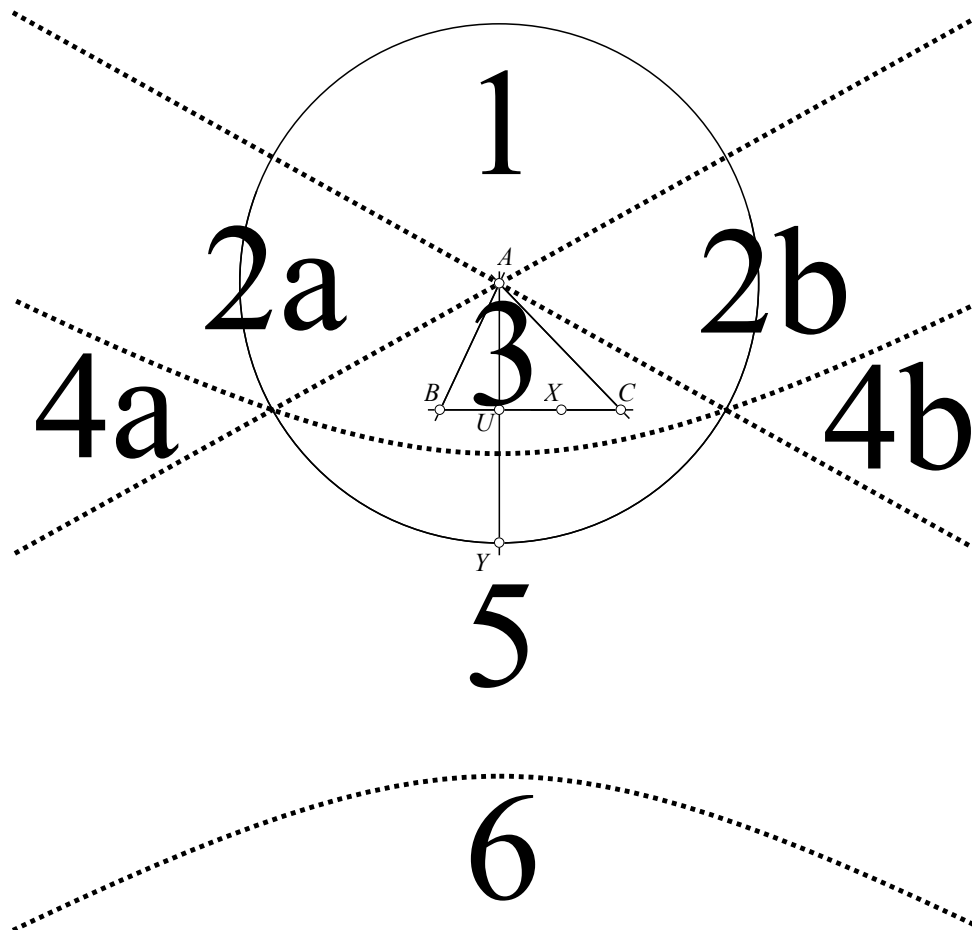


FIGURA 8: Las ocho regiones.

Francisco Javier García Capitán, 2009.