Problema 511. Si $0 < c < b < a < b + c$, probar que existe un triángulo cuyos lados tienen las medidas a, b, c tal que

$$16S^2 = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}$$

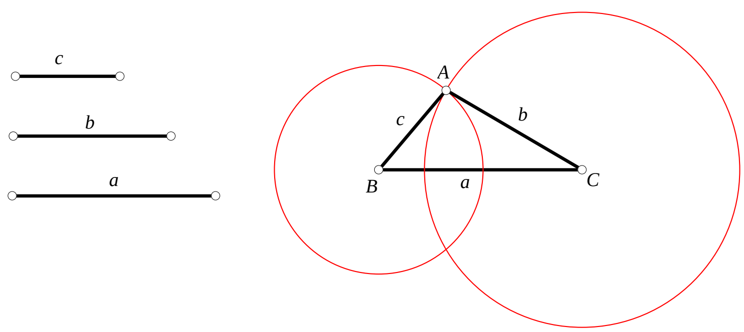
Linés, E. y Linés, E. (1949): Ejercicios de Análisis Matemático. Problema 41, pag 53.Madrid.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.
Dato che $0 < c < b < a < b + c$ sono verificate le disuguaglianze triangolari

$$a < b + c \qquad , \qquad b < a + c \qquad , \qquad c < a + b$$

ed un triangolo ABC con i lati di lunghezza a, b, c può essere essere ottenuto con la nota costruzione illustrata in figura



Dalla formula di Erone segue che l'area del triangolo ABC è data da

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \tag{*}$$

dove con s abbiamo indicato il semiperimetro $\frac{a+b+c}{2}$. Dalla (*) discende che

$$16S^2 = -a^4 + 2a^2b^2 - b^4 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2 - c^4$$

D'altra parte, con un semplice calcolo, si verifica che

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} = a^4 - 2a^2b^2 + b^4 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 + c^4$$

e la dimostrazione è completa. $\square$