

Problema 511 de triángulos cabri. Si $0 < c < b < a < b + c$, probar que existe un triángulo cuyos lados tienen las medidas a, b, c tales que

$$16S^2 = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix}.$$

Linés, E. y Linés, E. (1949): Linés, E. y Linés, E. (1949): Ejercicios de Análisis Matemático. Problema 41, pag 53. Madrid.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

En el enunciado tenemos $a < b + c$. También es $b < a < b + c < a + c$ y $c < b < a + b$. Por tanto a, b, c pueden ser los lados de un triángulo. Comprobemos ahora que se cumple la fórmula del enunciado.

Según la fórmula de Herón es $S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, de donde

$$\begin{aligned} 16S^2 &= (a+b+c)(b+c-a)(a-b+c)(a+b-c) = \\ &= -(a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2). \end{aligned}$$

Ahora calculamos los determinantes:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix} &= - \begin{vmatrix} 1 & c^2 & b^2 \\ 1 & 0 & a^2 \\ 1 & a^2 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & b^2 \\ 1 & c^2 & a^2 \\ 1 & b^2 & 0 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & c^2 \\ 1 & c^2 & 0 \\ 1 & b^2 & a^2 \end{vmatrix} \\ &= -(a^2b^2 + a^2c^2 - a^4) + (b^4 - b^2c^2 - a^2b^2) - (a^2c^2 + b^2c^2 - c^4) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & c & b \\ b & c & 0 & a \\ c & b & a & 0 \end{vmatrix} &= -a \begin{vmatrix} a & c & b \\ b & 0 & a \\ c & a & 0 \end{vmatrix} + b \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & c & a \\ c & b & 0 \end{vmatrix} - c \begin{vmatrix} a & 0 & b \\ b & c & 0 \\ c & b & a \end{vmatrix} \\ &= -a(ab^2 + ac^2 - a^3) + b(b^3 - bc^2 - a^2b) - (a^2c + b^2c - c^3) \\ &= (a^2b^2 + a^2c^2 - a^4) + (b^4 - b^2c^2 - a^2b^2) - (a^2c^2 + b^2c^2 - c^4) \\ &= a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2. \end{aligned}$$