Dado un triángulo $\widehat{ABC}$ de lados a, b y c, se traza la circunferencia inscrita; a ésta se le tira la tangente paralela al lado BC que determina un segundo triángulo $\widehat{AB_1C_1}$; con éste se reitera el trazado anterior, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de la sucesión infinita de los circunferencias inscritas.

SOLUCIÓN:
Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número $\boxed{\mathbf{512}}$.
http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm
Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.
Linés, E. y Linés, E. (1949): Ejercicios de Análisis Matemático. Problema 125, pag 175-176.Madrid.

—— - ——

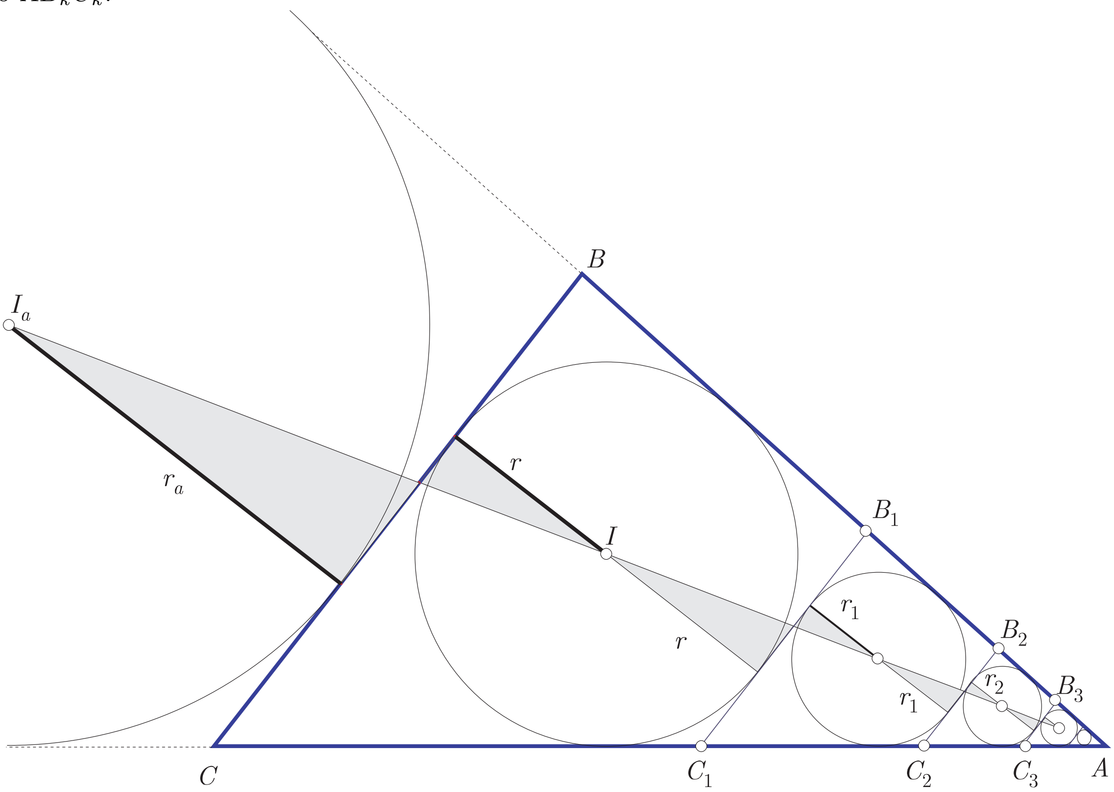
Primeramente, recordemos algunas fórmulas relativas a un triángulo, denotando por r el radio de la circunferencia inscrita, r_a el radio de la circunferencia exinscrita relativa al vértice A, y por S el doble del área de $\widehat{ABC}$:

$$r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}{a+b+c}}, \quad S = r(a+b+c), \quad r_a = \frac{S}{b+c-a}.$$

En consecuencia,

$$\frac{r}{r_a} = \frac{b+c-a}{a+b+c}.$$

Si trazamos las circunferencia exinscrita relativa al vértice A y hacemos las construcción propuesta en el ejercicio, para los cuatro primeros pasos, se obtiene la figura siguiente, denotando por r_k el radio de la circunferencia inscrita al triángulo $\widehat{AB_kC_k}$:



De la semejanza de los triángulo sombreados, se sigue que:

$$\frac{r_a}{r} = \frac{r}{r_1} = \frac{r_1}{r_2} = \cdots = \frac{r_k}{r_{k+1}} = \cdots$$

Se sigue que:

$$r_1 = \frac{r^2}{r_a}, \qquad r_2 = \frac{rr_1}{r_a} = \frac{r^3}{r_a^2}, \qquad r_3 = \frac{rr_2}{r_a} = \frac{r^4}{r_a^3}, \qquad \cdots, \qquad r_k = \frac{r^{k+1}}{r_a^k}, \qquad \ldots$$

Si denotamos por:

$$\Omega_0 = \text{área } \widehat{ABC} = \pi r^2, \quad \Omega_1 = \text{área } \widehat{AB_1C_1} = \pi r_1^2, \quad \Omega_k = \text{área } \widehat{AB_kC_k} = \pi r_k^2, \quad \ldots$$

tenemos que

$$\sum_{k=0}^{\infty}\Omega_k=\pi r^2\left(1+\left(\frac{r}{r_a}\right)^2+\left(\frac{r}{r_a}\right)^4+\cdots\right)=\pi r^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)^{2k}=\pi r^2\frac{(a+b+c)^2}{4a(b+c)}=$$

$$=\pi\frac{(b+c-a)(a+b-c)(a-b+c)(a+b+c)}{16a(b+c)}=\pi\frac{\text{área }\widehat{ABC}}{a(b+c)}.$$

Observación:

Sería interesante poder disponer de una construcción iterada mediante Cabri, con el fin de tener una comprobación aproximada de esta fórmula aplicada a un triángulo de longitudes de lados dadas.