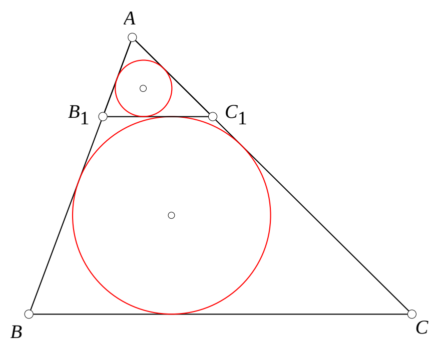
Problema 512. Dado un triángulo ABC de lados a, b, c se traza el círculo inscrito; a éste se le tira la tangente paralela al lado $a = BC$ que determina un segundo triángulo AB_1C_1; con éste se reitera el trazado anterior, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de la sucesión infinita de los círculos inscritos.

Linés, E. y Linés, E. (1949): Ejercicios de Análisis Matemático. Problema 125, pag 175-176, Madrid.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.

Siano rispettivamente S, s, h_a l'area, il semiperimetro, l'altezza relativa al lato BC del triangolo ABC; indichiamo altresì con r_i il raggio del cerchio inscritto nel triangolo AB_iC_i $(i = 0, 1, \dots)$, avendo posto $B_0 = B$, $C_0 = C$.



Dalla similitudine dei triangoli ABC ed AB_1C_1 risulta

$$\frac{r_1}{r} = \frac{h_a - 2r}{h_a} = \frac{\frac{2S}{a} - \frac{2S}{s}}{\frac{2S}{a}} = \frac{s-a}{s} = \frac{b+c-a}{a+b+c}$$

Pertanto, posto $\lambda = \frac{b+c-a}{a+b+c}$, abbiamo

$$r_1 = r \cdot \lambda$$

Analogamente, indicati con a_1, b_1, c_1 i lati del triangolo AB_1C_1, abbiamo

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{b_1 + c_1 - a_1}{a_1 + b_1 + c_1} \qquad (*)$$

Se indichiamo con k il rapporto di similitudine tra i due triangoli ABC ed AB_1C_1, dalla (*) discende che

$$r_2 = r_1 \cdot \frac{b_1 + c_1 - a_1}{a_1 + b_1 + c_1} = r_1 \cdot \frac{kb + kc - ka}{ka + kb + kc} = r_1 \cdot \frac{b+c-a}{a+b+c} = r\lambda^2$$

Ragionando allo stesso modo è facile dimostrare per induzione che

$$r_n = r\lambda^n \qquad , \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

ossia i termini della successione r_n formano una progressione geometrica di ragione λ, con $\lambda < 1$.

Pertanto la somma delle aree della succesione infinita di cerchi inscritti nel triangolo ABC è data da

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \pi r_n^2 = \pi \sum_{n=0}^{\infty} r^2 \lambda^{2n} = \pi r^2 \frac{1}{1-\lambda^2} = \pi \frac{S^2}{s^2} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{b+c-a}{a+b+c}\right)^2} = \\ = \pi \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{s^2} \cdot \frac{(a+b+c)^2}{4a(b+c)} = \\ = \pi \frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{a(b+c)} = \frac{\pi S^2}{a(b+c)} \qquad \square\end{aligned}$$