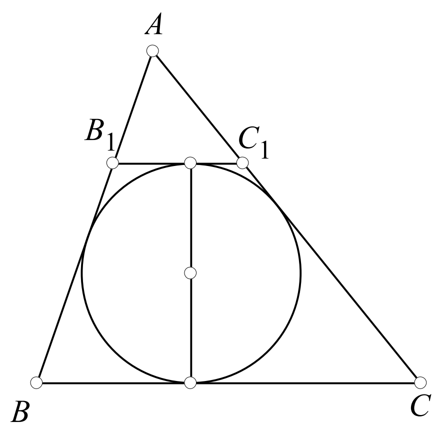
Problema 512 de *triánguloscabri*. *Dado un triángulo ABC de lados a, b, c, se traza el círculo inscrito; a éste se le tira la tangente paralela al lado $a = BC$ que determina un segundo triángulo AB_1C_1; con éste se reitera el trazado anterior, y así sucesivamente. Hallar la suma de las áreas de la sucesión infinita de los círculos inscritos.*

Linés, E. y Linés, E. (1949): Ejercicios de Análisis Matemático. Problema 125, pag 175-176.Madrid.

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sean h y r la altura trazada por A y el radio de la circunferencia inscrita del triángulo ABC, y h_1, r_1 los correspondientes del triángulo AB_1C_1. Por ser B_1C_1 paralela a BC, ambos triángulos son homotéticos.



Calculemos la razón de homotecia κ:

$$\frac{h_1}{r_1} = \frac{h}{r} \Rightarrow \kappa = \frac{r_1}{r} = \frac{h_1}{h} = \frac{h-2r}{h} = 1 - \frac{2r}{h} = 1 - \frac{2\frac{S}{s}}{\frac{2S}{a}} = 1 - \frac{a}{s} = \frac{s-a}{s}.$$

Entonces, la suma de las infinitas áreas es la suma de una serie infinita de razón k:

$$\Sigma = \pi r^2 \left(1 + \kappa^2 + \kappa^4 + \cdots\right) = \pi r^2 \cdot \frac{1}{1-\kappa^2} = \frac{\pi r^2}{1 - \left(\frac{s-a}{s}\right)^2} = \frac{\pi r^2 s^2}{s^2 - (s-a)^2}$$
$$= \frac{\pi r^2 (a+b+c)^2}{4a(b+c)}.$$