

Problema 513. Sea ABC un triángulo escaleno y N_a su punto de Nagel. Utilizando la notación habitual en la geometría del triángulo, y suponiendo, (sin pérdida de generalidad) que $b > c$

1. Demostrar que el triángulo de lados AN_a , $b - c$, $2r$, es rectángulo con hipotenusa AN_a ;
2. Demostrar, como consecuencia del apartado anterior, que un triángulo ABC es isósceles si y sólo si, una al menos, de las distancias entre los vértices del triángulo y su punto de Nagel, es igual al diámetro de la circunferencia inscrita.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. "El Sur", Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.

Nella risoluzione del problema useremo i seguenti teoremi

TEOREMA DI VAN AUBEL¹. Se ABC è un triangolo e AD , BE , CF sono tre ceviane concorrenti in un punto P allora

$$\frac{AP}{PD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC}$$

Dimostrazione.

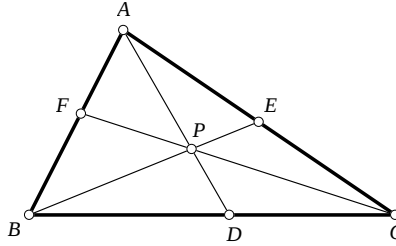


FIGURA 1

Dal teorema di Menelao applicato al triangolo ADC abbiamo

$$\frac{AF}{FB} \cdot \frac{BC}{CD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{AF}{FB} = \frac{CD}{BC} \cdot \frac{PA}{PD} \quad (1)$$

Analogamente dal teorema di Menelao applicato al triangolo ADC abbiamo

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA} = 1 \Rightarrow \frac{AE}{EC} = \frac{AP}{PD} \cdot \frac{BD}{BC} \quad (2)$$

¹Henricus Hubertus van Aubel (1830-1906), was a Dutch mathematician who discovered various triangle theorems, as well as a pretty theorem on quadrilaterals.

Sommando la (1) e la (2) otteniamo

$$\frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{PA}{BC \cdot PD} [CD + BD] = \frac{PA}{BC \cdot PD} \cdot BC = \frac{AP}{PD}$$

e la tesi è provata. ■

TEOREMA DI STEWART². Se AD è una ceviana di lunghezza p che divide il lato BC nei due segmenti $BD = m$, $DC = n$, allora

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n$$

dove $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$.

Dimostrazione.

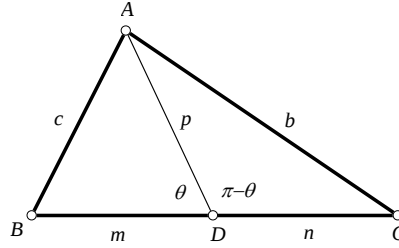


FIGURA 2

Sia $\theta = \angle ADB$. Dal teorema del coseno abbiamo

$$\cos \theta = \frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm} \quad (3)$$

$$\cos(\pi - \theta) = \frac{p^2 + n^2 - b^2}{2pn} \quad (4)$$

Tenuto conto che $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$, $m + n = a$ da (3) e (4) abbiamo

$$\frac{p^2 + n^2 - b^2}{2pn} = -\frac{p^2 + m^2 - c^2}{2pm} \Rightarrow$$

$$n(p^2 + n^2 - b^2) = -(p^2 + m^2 - c^2) \Rightarrow$$

$$(m + n)p^2 + mn(m + n) = mb^2 + nc^2 \Rightarrow$$

$$a(p^2 + mn) = b^2m + c^2n \quad \blacksquare$$

Affrontiamo ora la risoluzione del problema proposto:

²Matthew Stewart (1717-1785), was a Scottish geometer who wrote on geometry and planetary motion.

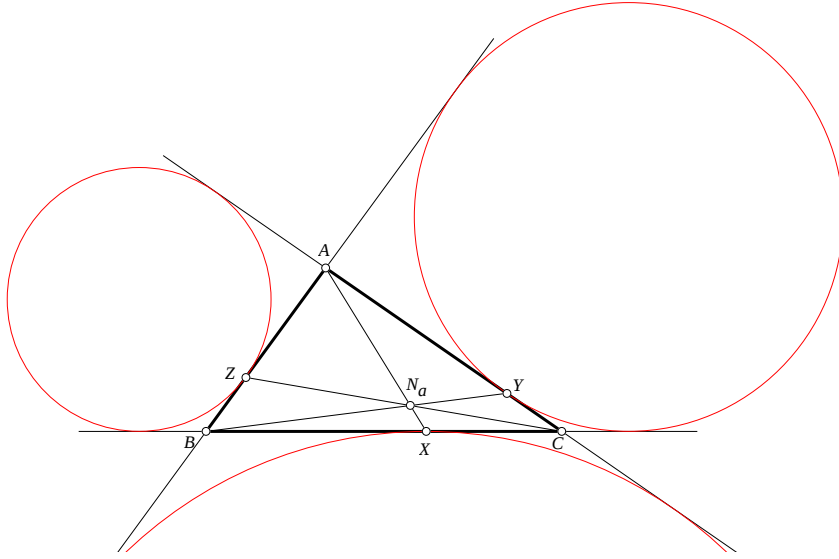


FIGURA 3

Indichiamo rispettivamente con s , X , Y , Z il semiperimetro di $\triangle ABC$ ed i punti di intersezione degli ex-cerchi con i lati BC , CA , AB .

1. Tenendo presenti le note formule:

$$BZ = CY = s - a \quad , \quad AZ = CX = s - b \quad , \quad AY = BX = s - c \quad (5)$$

dal TEOREMA DI VAN AUBEL abbiamo

$$\frac{AN_a}{N_aX} = \frac{AZ}{ZB} + \frac{AY}{YC} = \frac{s-b}{s-a} + \frac{s-c}{s-a} = \frac{a}{s-a} \quad \Rightarrow$$

Pertanto

$$\frac{AX}{AN_a} = \frac{s}{a} \quad \Rightarrow \quad AX = \frac{s}{a} AN_a \quad (6)$$

Dal TEOREMA DI STEWART abbiamo

$$BC (AX^2 + BX \cdot XC) = BX \cdot AC^2 + XC \cdot AB^2 \quad (7)$$

Sostituendo (5) e (6) nella (7) otteniamo

$$\begin{aligned} a \left[\frac{s^2}{a^2} AN_a^2 + (s-c)(s-b) \right] &= (s-c)b^2 + (s-b)c^2 \quad \Rightarrow \\ AN_a^2 &= \frac{a}{s^2} [(s-c)b^2 + (s-b)c^2 - a(s-b)(s-c)] \end{aligned} \quad (8)$$

D'altra parte essendo $r = [ABC]/s$ ed $[ABC] = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ risulta

$$(b-c)^2 + 4r^2 = (b-c)^2 + 4 \cdot \frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} \quad (9)$$

ed un semplice calcolo consente di verificare che i secondi membri di (8) e (9) sono uguali, per cui

$$AN_a^2 = (b-c)^2 + 4r^2$$

La proprietà è dunque dimostrata. $\square$

2. Osservato che valgono le analoghe relazioni

$$BN_a^2 = (c-a)^2 + 4r^2 \quad , \quad CN_a^2 = (a-b)^2 + 4r^2$$

possiamo dedurre che il triangolo $\triangle ABC$ è isoscele se e solo se è verificata almeno una delle seguenti uguaglianze

$$AN_a^2 = 4r^2 \quad , \quad BN_a^2 = 4r^2 \quad , \quad CN_a^2 = 4r^2$$

cioè almeno una di

$$AN_a = 2r \quad , \quad BN_a = 2r \quad , \quad CN_a = 2r$$

e questo si verifica se e solo se almeno una delle distanze dei vertici del triangolo dal suo punto di Nagel è uguale al diametro della circonferenza inscritta. $\square$