

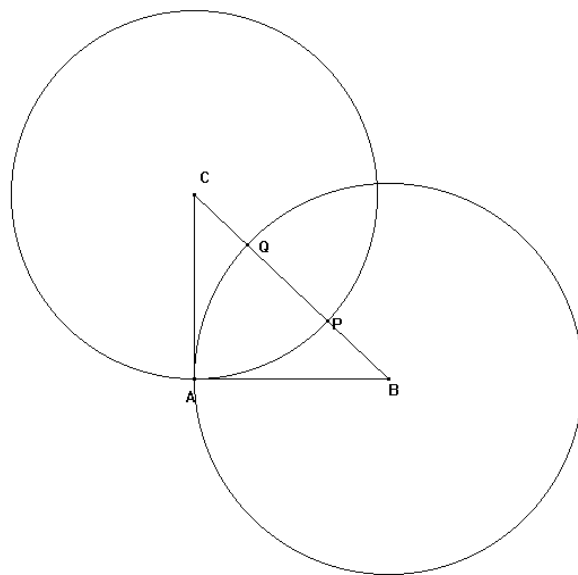
Solución de: Correa Pablo Ariel. Prof. de la ESB N°42. Buenos Aires, Argentina.

Problema 516

Sea ABC un triángulo rectángulo en A. Tracemos sobre el interior de la hipotenusa BQ=BA, y CP=CA.

Demostrar que: $PQ^2 = 2BP \cdot QC$

Bernd, B.C. (1994): Ramanujan's Notebooks, Part IV. Springer -Verlag



Si determinamos la potencia del punto C respecto de la $C(B; BA)$, tenemos:

$$\begin{aligned} CA^2 &= CQ \cdot (BC + AB) \rightarrow CA^2 = CQ \cdot (CQ + QP + PB + QP + PB) \\ &\rightarrow CA^2 = CQ \cdot (CQ + 2QP + 2PB) \end{aligned}$$

De igual manera, considerando la potencia del punto B respecto de la $C(C; CA)$:

$$\begin{aligned} AB^2 &= BP \cdot (BC + AC) \rightarrow AB^2 = BP \cdot (CQ + QP + PB + CQ + QP) \\ &\rightarrow AB^2 = BP \cdot (PB + 2QP + 2CQ) \end{aligned}$$

Sumando las expresiones anteriores, teniendo en cuenta que $BC = CQ + QP + PB$ y haciendo uso del teorema de Pitágoras:

$$\begin{aligned} BC^2 &= CA^2 + AB^2 \\ (CQ + QP + PB)^2 &= CQ \cdot (CQ + 2QP + 2PB) + BP \cdot (PB + 2QP + 2CQ) \end{aligned}$$

Desarrollando y cancelando se tiene lo que se quería demostrar:

$$PQ^2 = 2 \cdot BP \cdot QC$$