

Problema 517 de triángulos cabri. Eugene Calabi (1923-) encontró en 1997 que además del equilátero, hay otro triángulo en el que se pueden inscribir tres cuadrados que tienen lados iguales.

Uno de los cuadrados se apoya en los tres lados y los otros dos cuadrados tienen cada uno tres vértices sobre los lados del triángulo.

Barthe, D. (2005): Inscire un carré. Le triangle (Trois points, c'est tout!) (Bibliothèque tangente, L'aventure mathématique) Éditions Pole. Paris.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Asignamos coordenadas cartesianas de manera que $B = (0, 0)$, $C = (a, 0)$ y $A = (u, v)$, como en la Figura 1:

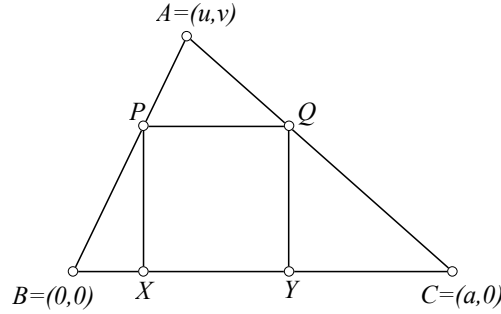


FIGURA 1

Entonces, para un cierto t , los vértices del cuadrado serán de la forma $P = (ut, vt)$, $X = (ut, 0)$, $Q = (ut + vt, vt)$ e $Y = (ut + vt, 0)$. La condición para t es que los puntos A, Q, C estén alineados. Entonces debe ser

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & ut + vt & a \\ v & vt & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ u & ut + vt & a \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & vt & a \\ 1 & t & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow a - vt - at = 0 \Rightarrow t = \frac{a}{a + v}.$$

Para este valor de t , el lado del cuadrado considerado es

$$l = vt = \frac{av}{a + v}.$$

Ahora consideramos un cuadrado inscrito como el de la Figura 2.

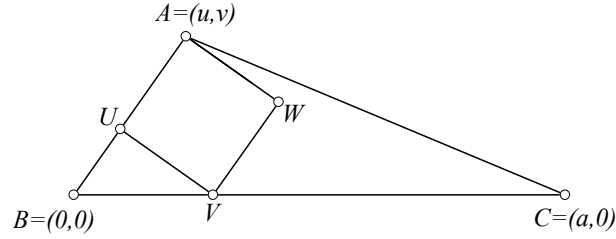


FIGURA 2

Si $U = (su, sv)$, la perpendicular por U a la recta AB es

$$u(x - su) + v(y - sv) = 0,$$

que corta a la recta BC cuando

$$x = \frac{s(u^2 + v^2)}{u} = \frac{sc^2}{u} \Rightarrow V = \left(\frac{sc^2}{u}, 0 \right).$$

Ahora imponemos que el cuadrilátero $AUVW$ es un cuadrado. Tenemos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{UA} &= ((1-s)u, (1-s)v), \\ \overrightarrow{UV} &= \left(\frac{sc^2}{u} - su, -sv \right) = \left(\frac{sv^2}{u}, -sv \right). \end{aligned}$$

Para que UA sea el resultado de girar UV un ángulo recto debe ser

$$sv = (1-s)u \Rightarrow s = \frac{u}{u+v}.$$

Como buscamos que las longitudes de los cuadrados sean iguales,

$$\frac{av}{a+v} = l = (1-s)c = \frac{cv}{u+v} \Rightarrow v = \frac{a(c-u)}{a-c}.$$

Si imponemos ahora que el triángulo es isósceles para conseguir a la vez tres cuadrados iguales, tendremos $u = \frac{a}{2}$ y $v^2 + (\frac{1}{2}a)^2 = c^2$, que conduce a la relación

$$2a^3 - 2a^2c - 3ac^2 + 2c^3 = 0,$$

dando para la razón a/c el valor aproximado 1.5513875245483203923...