Problema 518 de *triánguloscabri*. *Sea ABC un triángulo con ángulo mayor en A, y lados $a \geqslant b \geqslant c$. Tracemos sobre el interior del lado mayor BC opuesto al ángulo A, los puntos P y Q tales que $BP = a-b$ y $QC = a-c$.*

Sean $h_P = PP'$ y $h_Q = QQ'$ las alturas trazadas desde los vértices P y Q de los triángulos ABP y ACQ hasta sus pies P'y Q' sobre los lados opuestos AB y AC respectivamente.

Probar que:

a) $PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot QC \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} 0 \Leftrightarrow A \underset{\geqslant}{\overset{\leqslant}{}} 90°$.

b) $PQ - (h_P + h_Q) \underset{\leqslant}{\overset{\geqslant}{}} 0 \Leftrightarrow A \underset{\geqslant}{\overset{\leqslant}{}} 90°$.

¿Son a) y b) dos caracterizaciones equivalentes de la clase de triángulos según los ángulos?

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

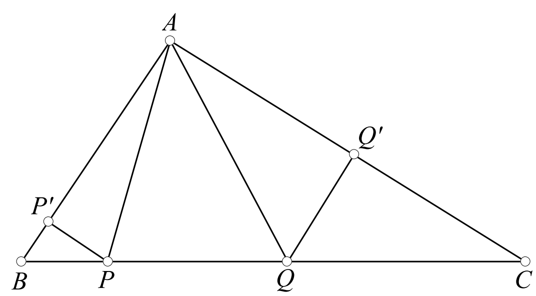

Figura 1

a) Tal como vimos en la solución del problema 516, por ser $BP = a - b$, $QC = a - c$ y $PQ = a - (a - b) - (a - c) = b + c - a$, tenemos que

$$\begin{aligned} PQ^2 - 2 \cdot BP \cdot QC =& (b + c - a)^2 - 2(a - b)(a - c) \\ =& b^2 + c^2 + a^2 + 2bc - 2ab - 2ac - 2a^2 + 2ab + 2ac - 2bc \\ =& b^2 + c^2 - a^2 \\ =& 2bc \cos A, \end{aligned}$$

lo cual justifica el apartado *a*).

b) Sea h_a la altura del triángulo ABC trazada desde A hasta el lado BC, que también es una altura de los triángulos ABP y BQC. Tenemos

$$h_P = PP' = \frac{2(ABP)}{AB} = \frac{BP \cdot h_a}{AB} = \frac{(a-b)\cdot h_a}{c},$$
$$h_Q = QQ' = \frac{2(AQC)}{CA} = \frac{CQ \cdot h_a}{CA} = \frac{(a-c)\cdot h_a}{b},$$

de manera que si representamos con S el área del triángulo ABC, tenemos

$$PQ - (h_P + h_Q) = (b+c-a) - \left(\frac{a-b}{c} + \frac{a-c}{b}\right) \cdot \frac{2S}{a}.$$

Se igualamos a cero y despejamos S obtendremos

$$S = \frac{\dfrac{a\cdot(b+c-a)}{2}}{\dfrac{a-b}{c} + \dfrac{a-c}{b}} = \frac{abc(b+c-a)}{2(ab+ac-b^2-c^2)}.$$

Al sustituir este valor de S en la igualdad $S^2 = s(s-a)(s-b)(s-c)$ (fórmula de Herón), resulta una igualdad de la forma $(b^2+c^2-a^2)\Delta = 0$, donde

$$\Delta = (b+c)^2a^3 - (b-c)^2(b+c)a^2 - (b-c)^2(b^2+4bc+c^2)a + (b-c)^2(b+c)(b^2+c^2).$$

El siguiente paso es demostrar que $\Delta > 0$ cuando a, b, c son los lados de un triángulo. Para ello, usamos las sustituciones de Ravi ($a = y+z, b = z+x, c = x+y$), que permiten obtener

$$\Delta = 4(y-z)^2x^3 + 4(y+z)^3x^2 + 4xyz(3y^2+10yz+3z^2) + 16y^2z^2(y+z) > 0.$$

Esto quiere decir que $PQ - (h_P + h_Q) = 0 \Leftrightarrow A = 90^\circ$ y, usando un razonamiento de continuidad, el signo de $PQ - (h_P + h_Q)$ será el mismo para todos los triángulos del enunciado con $A < 90^\circ$, y lo mismo le pasará a todos los triángulos del enunciado con $A > 90^\circ$.

En el caso de los primeros está el triángulo equilátero, con $b = c = a$ y $PQ - (h_P + h_Q) = PQ = a > 0$. Como ejemplo de triángulo obtusángulo consideramos el triángulo isósceles con base $a = 8$ y altura $h_a = 3$, así que $b = c = 5$ y $S = 12$, con lo que tenemos $PQ - (h_P + h_Q) = -\frac{8}{5} < 0$.

Finalmente, constatar que para los triángulos con A como ángulo mayor (aquí el papel de los lados b y c es simétrico), las caracterizaciones de los apartados *a*) y *b*) son por tanto equivalentes.