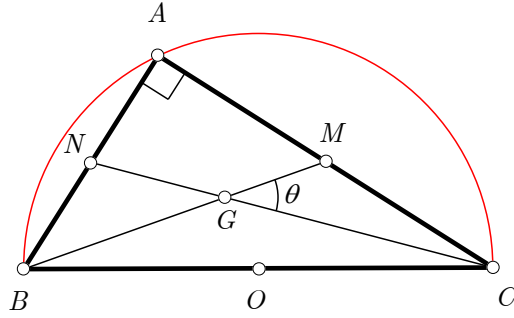


Problema 520. De entre todos los triángulos rectángulos con hipotenusa fija a , determinar aquel tal que el ángulo agudo formado por las medianas que parten de los vértices correspondientes a los ángulos agudos del mismo, sea máximo.

Vicario, C. (2009) Comunicación personal.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.



Indichiamo rispettivamente con M , N , θ il punto medio di AC , il punto medio di BC e l'angolo acuto formato dalle mediane BM e CN . Dal teorema del coseno abbiamo:

$$\cos \theta = \frac{GM^2 + GC^2 - MC^2}{2 \cdot GM \cdot GC} \quad (1)$$

Utilizzando la formula della mediana possiamo trovare GM e GC :

$$GM = \frac{1}{3}BM = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2} \quad (2)$$

$$GC = \frac{2}{3}CN = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2} \quad (3)$$

dove, secondo le usuali notazioni, abbiamo posto $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$.

Sostituendo le formule (2) e (3) nella (1) e tenuto conto che $a^2 = b^2 + c^2$, $MC = b/2$, con facili calcoli otteniamo:

$$\cos \theta = \frac{2(b^2 + c^2)}{\sqrt{4b^2 + c^2}\sqrt{b^2 + 4c^2}} \quad (4)$$

Osserviamo che l'angolo θ è massimo se $\cos \theta$ è minimo.

Per trovare il minimo di $\cos \theta$ al variare di A sulla semicirconferenza di diametro BC , fissiamo un sistema di coordinate cartesiane con origine O nel punto medio di BC in modo che:

$$B\left(-\frac{a}{2}, 0\right) \quad , \quad C\left(\frac{a}{2}, 0\right)$$

Le coordinate del punto A sono espresse da

$$A\left(\frac{a}{2}\cos\varphi, \frac{a}{2}\sin\varphi\right) \quad , \quad \text{dove } \varphi = \angle COA$$

e, pertanto

$$b^2 = AC^2 = \left(\frac{a}{2} - \frac{a}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{2}(1 - \cos\varphi) \quad (5)$$

$$c^2 = AB^2 = \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2}\cos\varphi\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\sin\varphi\right)^2 = \frac{a^2}{2}(1 + \cos\varphi) \quad (6)$$

Sostituendo le formule (5) e (6) nella (4) abbiamo:

$$\cos\theta = \frac{4a^2}{\sqrt{25 - 9\cos^2\varphi}}$$

Pertanto l'angolo θ è massimo se

$$\cos\varphi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

ossia se il triangolo $\triangle ABC$ è rettangolo isoscele ($AB = AC$). □