

Problema 521. Sea ABC un triángulo. Sea K el simediano (o punto de Lemoine-Grebe) del mismo. Consideremos las simedianas BK y CK que parten de sus vértices B y C , respectivamente. Demostrar que si estas simedianas son perpendiculares entonces tenemos que:

- (a) $a^4 = b^4 - 4b^2c^2 + c^4$.
- (b) Uno de los ángulos B ó C es obtuso.
- (c) Siendo G el baricentro del triángulo se cumple que $\angle BGC = 90^\circ + \angle A$.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa.

Prima di risolvere il problema dimostriamo il seguente lemma.

LEMMA. Dato un triangolo ABC e due punti $D, D' \in BC$, valgono le seguenti proprietà:

(i)

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC}$$

(ii) Se AD, AD' sono due ceviane coniugate isogonali allora

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB^2}{AC^2}$$

(iii) AD è una simmediana se e solo se

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2}$$

(iv) Se AD è una simmediana la sua lunghezza s_a è data da

$$s_a = \frac{bc\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{a^2 + c^2}$$

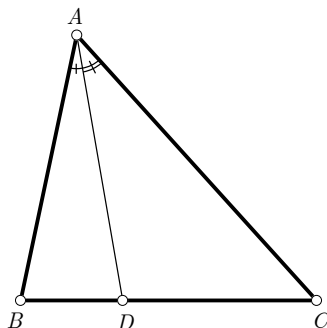
(v) Se K è il punto di Lemoine la lunghezza del segmento AK è data da

$$AK = \frac{bc\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{a^2 + b^2 + c^2}$$

e analoghe relazioni valgono per BK e CK .

Dimostrazione.

(i)



Dal teorema dei seni applicato ai triangoli $\triangle ABD$ e $\triangle ADC$ segue che

$$BD = \frac{AB}{\sin \angle ADB} \cdot \sin \angle BAD$$

$$DC = \frac{AC}{\sin(180^\circ - \angle ADB)} \cdot \sin \angle DAC = \frac{AC}{\sin \angle ADB} \cdot \sin \angle DAC$$

e l'uguaglianza richiesta si ottiene dividendo membro a membro le due relazioni ottenute. ■

(ii) Poichè AD e AD' sono coniugate isogonali

$$\sin \angle BAD = \sin \angle D'AC, \quad \sin \angle BAD' = \sin \angle DAC$$

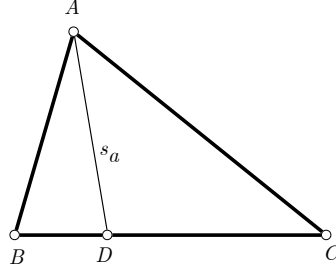
Pertanto, utilizzando la (i), abbiamo

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BD'}{D'C} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD}{\sin \angle DAC} \cdot \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \angle BAD'}{\sin \angle D'AC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{b^2}{c^2} \quad \blacksquare$$

(iii) Detto M il punto medio di BC , siccome AD è una simmedianiana, le ceviane AD e AM sono coniugate isogonali. Dalla proprietà (ii) segue che

$$\frac{BD}{DC} \cdot \frac{BM}{MC} = \frac{AB^2}{AC^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{BD}{DC} = \frac{AB^2}{AC^2} = \frac{c^2}{b^2} \quad \blacksquare$$

(iv) Se AD è una simmediana dalla proprietà (iii) segue che $BD : DC = c^2 : b^2$.



Pertanto, applicando la proprietà del comporre, abbiamo

$$BC : BD = (b^2 + c^2) : c^2 \quad \Rightarrow \quad BD = \frac{ac^2}{b^2 + c^2} \quad (1)$$

$$BC : DC = (b^2 + c^2) : b^2 \quad \Rightarrow \quad DC = \frac{ab^2}{b^2 + c^2} \quad (2)$$

Per calcolare la lunghezza di AD usiamo (1),(2) e il teorema di Stewart:

$$BC \cdot (AD^2 + BD \cdot DC) = BD \cdot AC^2 + DC \cdot AB^2 \quad \Leftrightarrow$$

$$a \left(s_a^2 + \frac{ac^2}{b^2 + c^2} \cdot \frac{ab^2}{b^2 + c^2} \right) = \frac{ac^2}{b^2 + c^2} \cdot b^2 + \frac{ab^2}{b^2 + c^2} \cdot c^2 \quad \Leftrightarrow$$

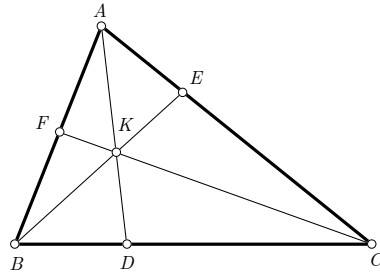
$$a \left[s_a^2 (b^2 + c^2)^2 + a^2 b^2 c^2 \right] = 2ab^2 c^2 (b^2 + c^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$s_a^2 (b^2 + c^2)^2 = b^2 c^2 (2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad \Leftrightarrow$$

$$s_a^2 = \frac{b^2 c^2 (2b^2 + 2c^2 - a^2)}{(b^2 + c^2)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$s_a = \frac{bc\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{b^2 + c^2} \quad \blacksquare$$

(v) Siano $E = BK \cap AC$, $F = CK \cap AB$.



Dal teorema di Van Aubel¹, tenuto conto di (iii) e (iv), abbiamo:

$$\begin{aligned}
\frac{AK}{KD} &= \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} && \Leftrightarrow \\
a^2 \cdot AK &= (b^2 + c^2) (s_a - AK) && \Leftrightarrow \\
(a^2 + b^2 + c^2) AK &= (b^2 + c^2) s_a && \Leftrightarrow \\
AK &= \frac{(b^2 + c^2) s_a}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{bc\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}{a^2 + b^2 + c^2} && \blacksquare
\end{aligned}$$

Risolviamo ora il problema proposto:

(a) Siano $E = BK \cap AC$, $F = CK \cap AB$. Dal LEMMA (proprietà (v)) abbiamo:

$$BK = \frac{ac\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (3)$$

$$CK = \frac{ab\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (4)$$

Se $BK \perp CK$ dal teorema di Pitagora discende che $BK^2 + CK^2 = BC^2$ e allora, tenuto conto di (3) e (4), otteniamo:

$$\begin{aligned}
\frac{a^2 c^2 (2a^2 + 2c^2 - b^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} + \frac{a^2 b^2 (2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} &= a^2 && \Leftrightarrow \\
a^4 &= b^4 - 4b^2 c^2 + c^4 && \blacksquare
\end{aligned}$$

(b) Dall'identità

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) + 2b^2 c^2 = a^4 - b^4 + 4b^2 c^2 - c^4$$

tenuto conto che $a^4 - b^4 + 4b^2 c^2 - c^4 = 0$, segue

$$(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2) < 0 \quad \Rightarrow$$

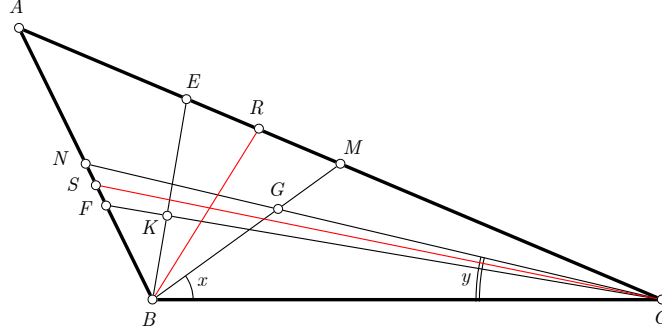
$$(a^2 + c^2 - b^2 < 0) \quad \vee \quad (a^2 + b^2 - c^2 < 0) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} < 0 \right) \quad \vee \quad \left(\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} < 0 \right)$$

Pertanto almeno uno degli angoli $\angle B$ o $\angle C$ deve essere ottuso. $\blacksquare$

¹Per la dimostrazione del teorema di Van Aubel si veda la soluzione del problema 513.

(c) Senza perdita di generalità possiamo supporre che $AB < BC$ e che l'angolo B è ottuso, come rappresentato nella seguente figura, dove con G abbiamo indicato il baricentro, con BR, CS le bisettrici degli angoli B, C , con BM, CN le mediane, con BE, CF le simmediane.



Indicati con x ed y gli angoli $\angle GBC$ e $\angle GCB$, abbiamo:

$$\begin{cases} \angle KBC = x + 2\left(\frac{B}{2} - x\right) = B - x \\ \angle KCB = y - 2\left(y - \frac{C}{2}\right) = C - y \end{cases}$$

Pertanto, se $BK \perp CK$, risulta:

$$90^\circ = \angle KBC + \angle KCB = B + C - (x + y) \quad \Rightarrow$$

$$x + y = B + C - 90^\circ = 180^\circ - A - 90^\circ = 90^\circ - A \quad \Rightarrow$$

$$\angle BGC = 180^\circ - (x + y) = 90^\circ + A \quad \blacksquare$$

Osservazione. Le formule (3) e (4) si possono ottenere utilizzando coordinate baricentriche e la formula per la distanza tra due punti²:

$$PQ^2 = \frac{1}{(u+v+w)^2(x+y+z)^2} \sum_{\text{cyclic}} S_A((v+w)x - u(y+z))^2 \quad (*)$$

dove $P(x:y:z)$, $Q(u:v:w)$ e S_A, S_B, S_C indicano le notazioni di Conway

$$S_A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2}, \quad S_B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2}, \quad S_C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}$$

Per ricavare (3) e (4) basta usare (*) con $K(a:b:c)$, $B(0:1:0)$, $C(0:0:1)$.

²Paul Yiu, Introduction to triangle geometry, pag. 88.