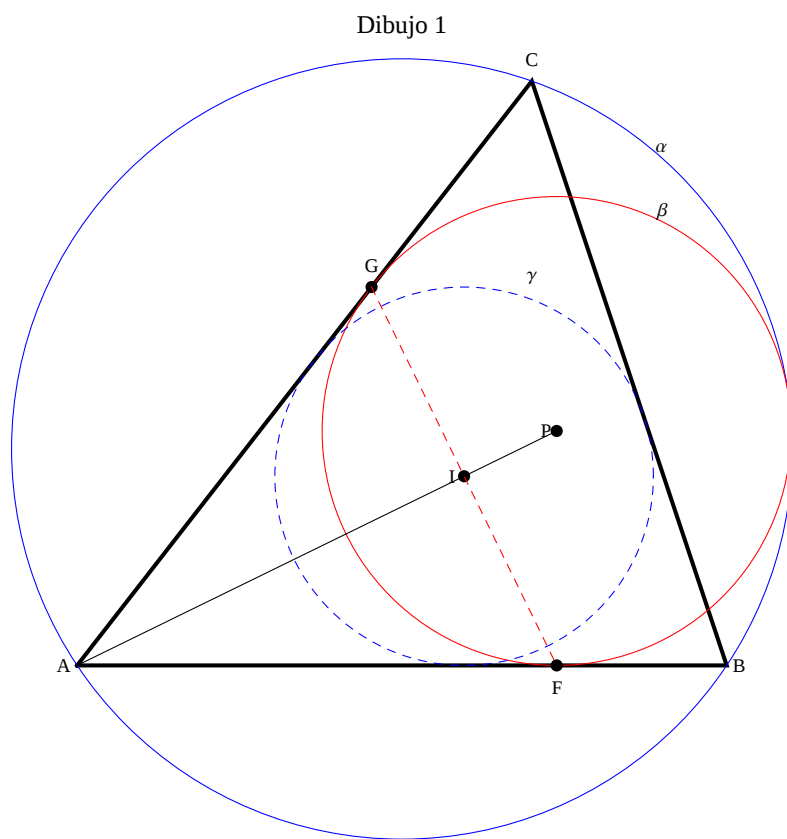


■ Enunciado

Sea ABC un triángulo, α la circunferencia circunscrita a ABC y β la circunferencia tangente a los lados AB en F (interior a AB) y AC en G (interior a AC) y a α . Demostrar que el incentro de ABC es el punto medio del segmento FG.

■ Solución

La situación del problema es la del dibujo. Bastaría demostrar que los puntos A y el incentro son inversos respecto a la circunferencia β .



Consideremos el triángulo de vèrtices $A=(0,0)$, $B=(1,0)$ y $C=(a,b)$. En este caso β resulta tener de centro

$$P = \left(\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{2b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+\sqrt{a^2+b^2}\left(1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}\right)+a\left(1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}\right)} \right)$$
 y radio la ordenada (*).

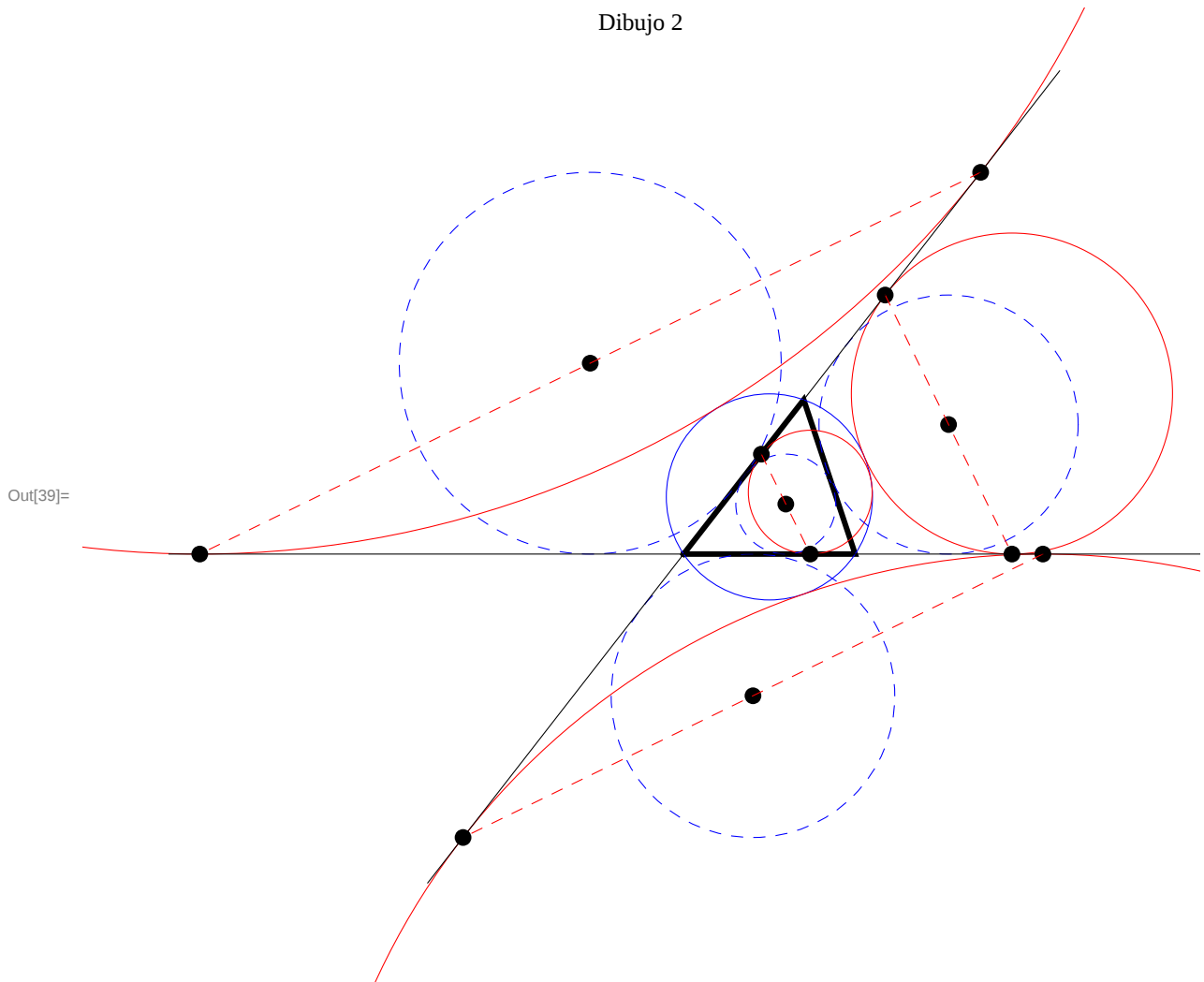
Sabemos que el inverso A' de un punto A respecto a una circunferencia de centro O y radio r , cumple que $OA.OA' = r^2$. O mejor, vectorialmente el inverso de A viene dado por $\vec{O} + r^2 \frac{\vec{AO}}{\vec{AO} \cdot \vec{AO}}$ (**).

Invertimos el vértice $A(0,0)$ respecto a L y obtenemos

$\left(\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{(-1+a)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2} \right), \frac{b}{1 + \sqrt{(-1+a)^2 + b^2} + \sqrt{a^2 + b^2}} \right)$ que es precisamente el incentro.

Es posible extender este resultado a las otras circunferencias tangentes y a los otros incentros como vemos en el siguiente dibujo.

Dibujo 2



(*) Todos los círculos que aparecen están calculados con *Mathematica*.

(**) He aquí el comando usado con *Mathematica*:

Inversion[$p_:$ {0, 0}, $r_:$ 1][$x_$] := $p + r^2 \frac{(x-p)}{(x-p) \cdot (x-p)}$.