Pr. Cabri 522
por César Beade Franco

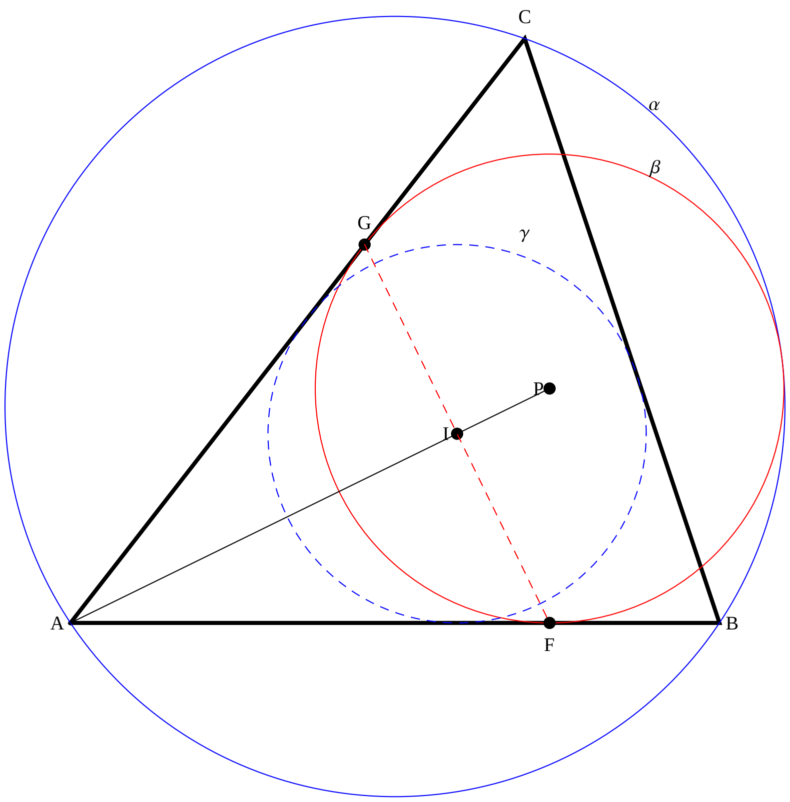
Enunciado

Sea ABC un triángulo, α la circunferencia circunscrita a ABC y β la circunferencia tangente a los lados AB en F (interior a AB) y AC en G (interior a AC) y a α. Demostrar que el incentro de ABC es el punto medio del segmento FG.

Solución (analítica)

La situación del problema es la del dibujo. Bastaría demostrar que los puntos A y el incentro son inversos respecto a la circunferencia β.

Dibujo 1



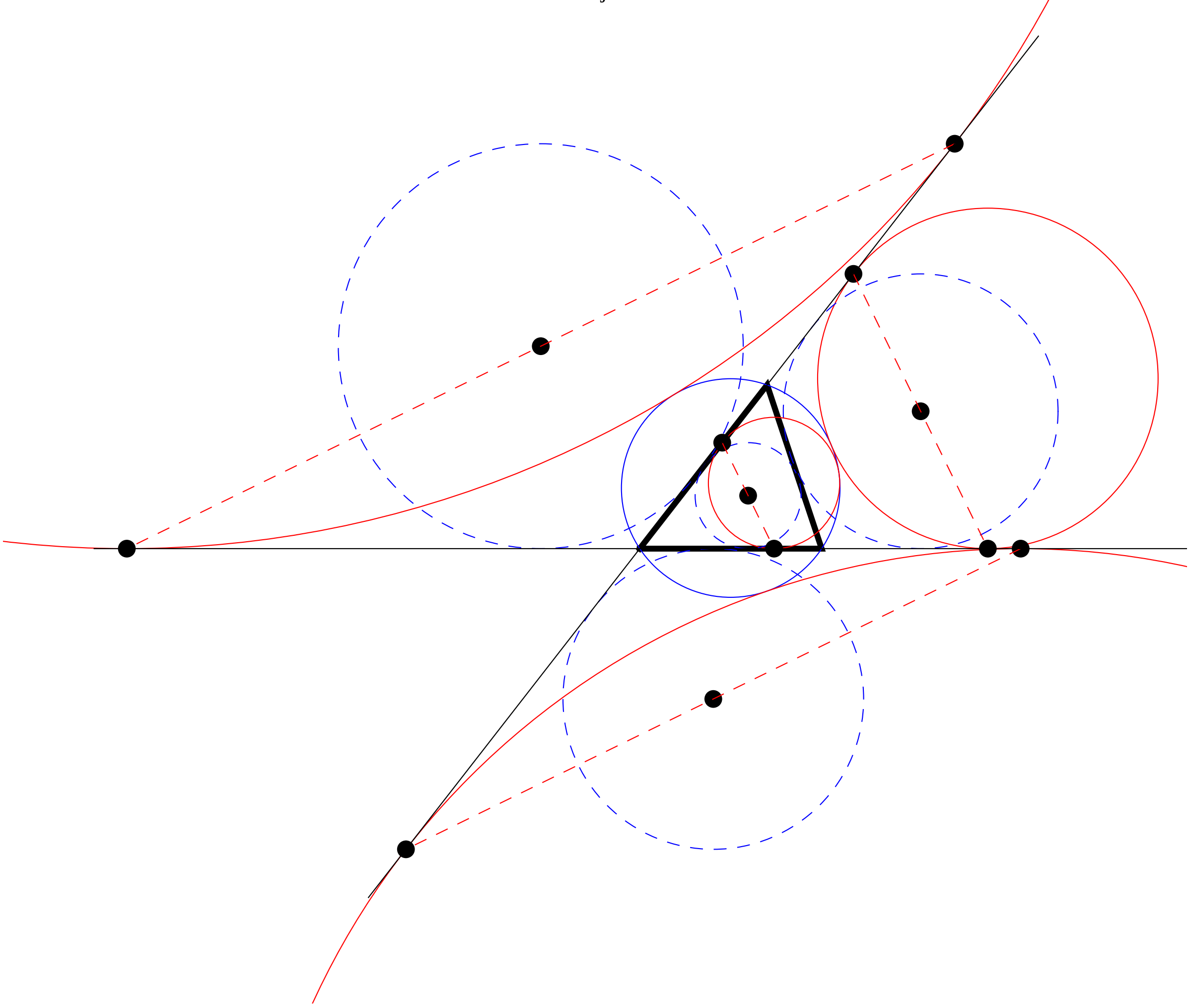
Consideremos el triángulo de vèrtices A=(0,0), B=(1,0) y C=(a,b). En este caso β resulta tener de centro $P=\left(\frac{2\sqrt{a^2+b^2}}{1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}},\ \frac{2b\sqrt{a^2+b^2}}{a^2+b^2+\sqrt{a^2+b^2}\left(1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}\right)+a\left(1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}\right)}\right)$ y radio la ordenada (*).

Sabemos que el inverso A' de un punto A respecto a una circunferencia de centro O y radio r, cumple que OA.OA' = r^2. O mejor, vectorialmente el inverso de A viene dado por $\vec{O} + r^2 \frac{\vec{AO}}{\vec{AO}.\vec{AO}}$ (**).

Invertimos el vértice A(0,0) respecto a L y obtenemos $\left(\left\{\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}\right), \frac{b}{1+\sqrt{(-1+a)^2+b^2}+\sqrt{a^2+b^2}}\right\}\right)$ que es precisamente el incentro.

Es posible extender este resultado a las otras circunferencias tangentes y a los otros incentros como vemos en el siguiente dibujo.

Dibujo 2



(*) Todos los circulos que aparecen están calculados con *Mathematica*.

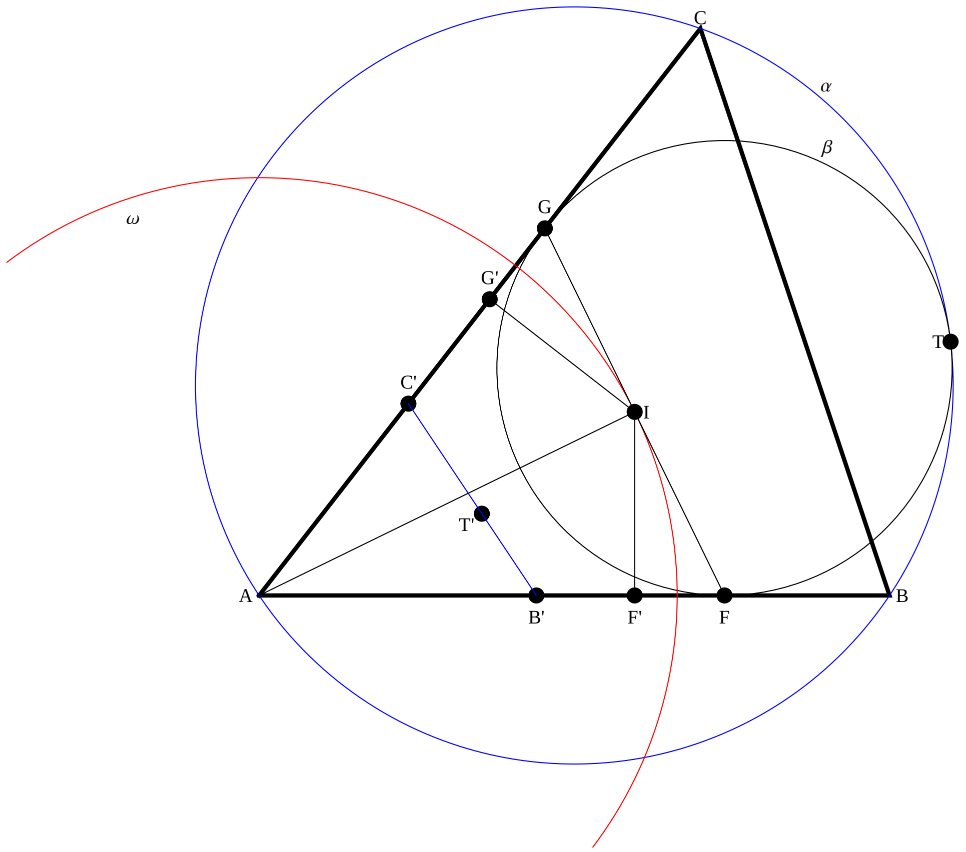
(**) He aquí el comando usado con *Mathematica*:

```
Inversion[p_: {0, 0}, r_: 1][x_] := p + r^2 (x-p)/((x-p).(x-p)).
```

■ Solución (inversión)

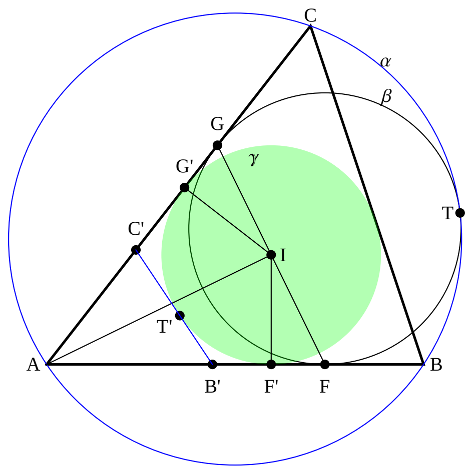
I. La siguiente solución, que usa la inversión, está inspirada en otra debida a Nixon, Genese y Heppel, y se publicó en una revista de EEUU hace 40 años (1).

II. Vamos a demostrar que el punto medio de FG, I en el dibujo, es el incentro de ABC.



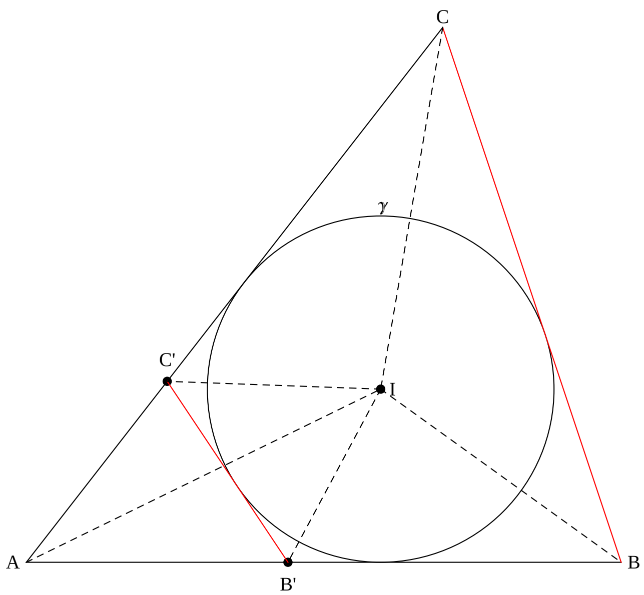
III. Consideremos la circunferencia ω de centro A y radio AI.
Invertimos respecto a ω el circuncírculo, obteniendo la recta B'C'. También T se invierte en T', así como F' y G' son los inversos respectivos de F y G.

iV. Observamos que los ángulos AF'I y AG'I son rectos al serlo AIF y AIG (2) y ser semejantes los correspondientes triángulos debido a la inversión. Así pues IF'= IG' son radios del círculo γ de centro I tangente a los lados AB y AC del triángulo.



V. Este círculo γ es inverso del β pues es tangente a los lados AB y AC y pasa por F' y G'. Por tanto ha de tocar a B'C' (inverso de α) en T'. Es decir, I es un excentro del triángulo AB'C'.

VI. Ahora hemos de hacer una observación (3). Veamos el siguiente dibujo.
Se cumple la siguiente relación de ángulos :
AIB' = π - $\frac{A}{2}$ - AB'I = π - $\frac{A}{2}$ - $(\frac{\pi}{2}+\frac{B'}{2})$ = $\frac{\pi-A-B'}{2}$ = $\frac{C'}{2}$ = $\frac{B}{2}$ y análogamente AIC = $\frac{B'}{2}$ = $\frac{C}{2}$ (4).
Así que, CI es la bisectriz del ángulo C (y BI lo es del B). Lo que significa que el segmento BC es tangente a la circunferencia γ .



VII. Hemos demostrado que I es el incentro del triángulo ABC.

Notas

(1) De ahí he tomado la crucial inversión que utilizo. Ver el problema 522 de la página de Barroso (artículo de Aymé).
(2) Esto es así pues los segmentos FI y GI son iguales, por lo que AI es una altura del triángulo isósceles AFG.
(3) Aquí la demostración citada da un largo rodeo para deducir que I es el incentro.
(4) Señalemos que, a causa de la inversión, los triángulos ABC y AC'B' son semejantes.