

Problema 522. Sea ABC un triángulo acutángulo. Una circunferencia ω es tangente a AB y a AC en P y Q respectivamente, y también es tangente a la circunferencia circunscrita a ABC en un punto S . Demostrar que el punto medio de PQ es el incentro de ABC .

<http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335>

Soluzione trigonometrica, Ercole Suppa.

Indichiamo rispettivamente con M , K , O , O_a , r , R , ρ il punto medio di PQ , la proiezione di M su AB , il circoncentro di $\triangle ABC$, il centro di ω , il raggio del cerchio inscritto, il raggio del cerchio circoscritto ed il raggio di ω .

E' evidente che AM è la bisettrice di $\angle BAC$, quindi per dimostrare che M è l'incentro di ABC basterà verificare che $MK = r$.

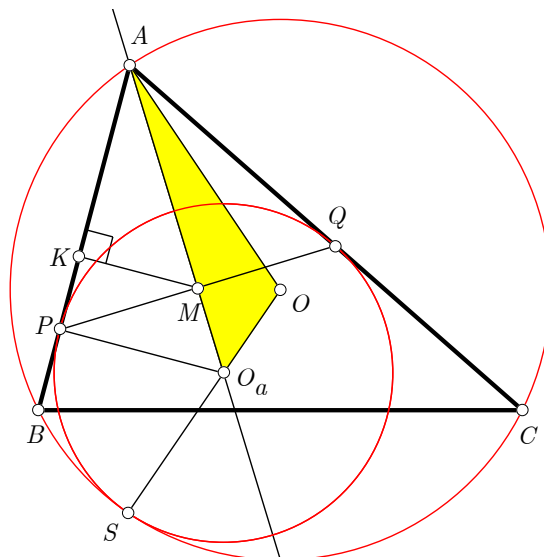


FIGURA 1

Dal teorema del teorema del coseno discende che

$$OO_a^2 = AO^2 + AO_a^2 - 2 \cdot AO \cdot AO_a \cdot \cos \angle O_aAO \quad (1)$$

Posto $AO_a = d$ ed osservato che:

$$\angle O_aAO = \frac{A}{2} - (90^\circ - B) = \frac{B-C}{2} \quad , \quad OO_a = R - \rho = R - AO_a \sin \frac{A}{2}$$

possiamo riscrivere la (1) nella forma seguente

$$\left(R - d \sin \frac{A}{2} \right)^2 = R^2 + d^2 - 2Rd \cdot \cos \frac{B-C}{2} \quad (2)$$

Risolvendo (2) rispetto a d con un semplice calcolo si ottiene

$$d = \frac{4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos^2 \frac{A}{2}} \quad (3)$$

Utilizzando la (3) e la nota relazione

$$r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

otteniamo

$$AP = d \cos \frac{A}{2} = \frac{4R \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = \frac{4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}} = \frac{2r}{\sin A} \quad (4)$$

Pertanto

$$KM = AM \sin \frac{A}{2} = AP \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} = \frac{2r}{\sin A} \cos \frac{A}{2} \sin \frac{A}{2} = r$$

e la dimostrazione è completa.

Prima soluzione sintetica.

Siano O il circoncentro di $\triangle ABC$, $P' = SP \cap (O)$, $Q' = SQ \cap (O)$. L'omotetia h di centro S e rapporto $k = \frac{SP'}{SP}$ trasforma P in P' , Q in Q' , ω in (O) , le rette AB , AC nelle rette s , t tangenti ad (O) in P' , Q' rispettivamente.

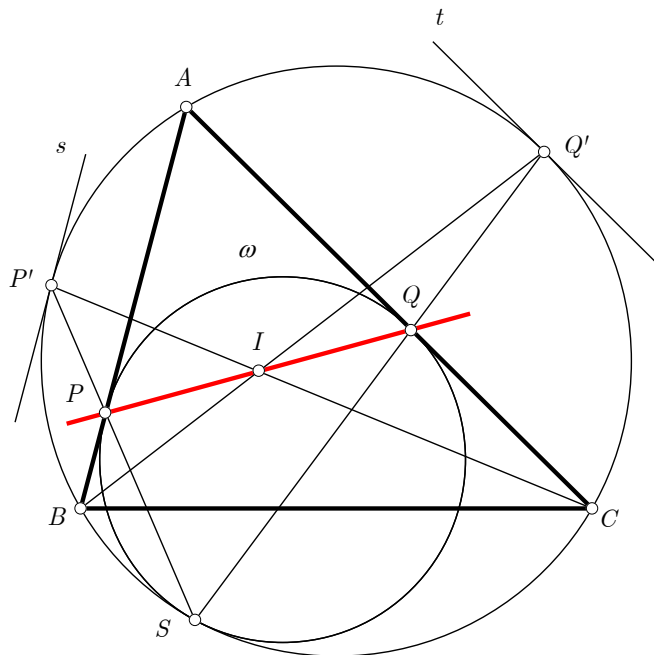


FIGURA 2

Pertanto P', Q' sono i punti medi degli archi AB, AC e, di conseguenza, BQ', CP' sono le bisettrici degli angoli $\angle ABC, \angle ACB$ ed il punto $I = BQ' \cap CP'$ è l'incentro del triangolo $\triangle ABC$.

Poichè l'esagono $ABQ'SP'C$ è inscritto in (O) , per il teorema di Pascal i punti I, P, Q sono allineati. Dato che $\triangle APQ$ è isoscele, la sua bisettrice AI è anche mediana, quindi I è il punto medio di PQ . $\square$

Il problema può essere risolto anche mediante l'inversione circolare.

L'idea originale della seguente soluzione è dovuta a J. Neuberg¹ ed è stata utilizzata da N. Dergiades² per risolvere il problema 2464 di Crux Mathematicorum. Per ulteriori note storiche su questo problema, si consiglia di leggere l'interessante articolo di J.L. Aime³.

Seconda soluzione sintetica.

Trasformiamo la figura mediante l'inversione circolare rispetto alla circonferenza Γ di centro A e raggio $\sqrt{AB \cdot AC}$ e disegniamo di colore rosso le figure trasformate (FIGURA 3).

Prendiamo sulla semiretta AB il punto B' tale che $AB' = AC$, sulla semiretta AC il punto C' tale che $AC' = AB$ ed osserviamo che:

- i punti B' e C' sono gli inversi di B e C ;
- la circonferenza γ circoscritta ad $\triangle ABC$ si trasforma nella retta $B'C'$;
- poichè ω tocca AB, AC e γ , essa si trasforma in una circonferenza ω' che tocca i lati del triangolo $\triangle AB'C'$ ed è esterna ad ω , quindi ω' è la circonferenza A -exinscritta di $\triangle AB'C'$;
- poichè $\triangle AB'C'$ e $\triangle ABC$ sono simmetrici rispetto alla bisettrice dell'angolo in A , ω' è la circonferenza A -exinscritta anche del triangolo $\triangle ABC$ e quindi ha come centro il punto I_a (A -excentro di $\triangle ABC$);
- i punti P' e Q' , trasformati di P e Q tramite inversione circolare, sono i punti di tangenza di ω' con AB e AC rispettivamente;

Indichiamo con J il punto di intersezione tra PQ ed AI_a . L'inversa della retta PQ è il cerchio che passa per A, P', Q' . Poichè i punti A, I_a, P', Q' sono conciclici, allora l'inverso di J è il punto I_a . Allora

$$AJ \cdot AI_a = AB \cdot AC \Rightarrow \frac{AJ}{AC} = \frac{AB}{AI_a} \Rightarrow \triangle AJC \sim \triangle ABI_a \Rightarrow$$

¹Mathesis 10(1090), Question 659, pag. 67

²Crux Mathematicorum 26(2000), problem 2464, pag. 434

³J.L. Aime, [A new mixitilinear adventure I](#)

