PROBLEMA 522 *de Triángulos Cabri(Ricardo Barroso)*

Sea ABC un triángulo acutángulo. Una circunferencia w es tangente a AB y a AC en P y Q respectivamente, y también es tangente a la circunferencia circunscrita a ABC en un punto S. Demostrar que el punto medio de $\overline{PQ}$ es el incentro de ABC.

Fuentes:
http://personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/
http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335

Solución de Milton Donaire Peña (Lima - Perú)

Lema 522.1. *Si una circunferencia, es tangente internamente a una segunda circunferencia, en S, y a una de sus cuerdas $\overline{AB}$, en P, entonces la recta SP, biseca al arco AB que no contiene a S.*

Lema 522.2. *Si en un triángulo ABC, M es un punto de su bisectriz interior trazada desde C y, si además, $m\measuredangle AMC = 90^o + (m\measuredangle ABC)/2$. Entonces M es incentro del triángulo ABC.*

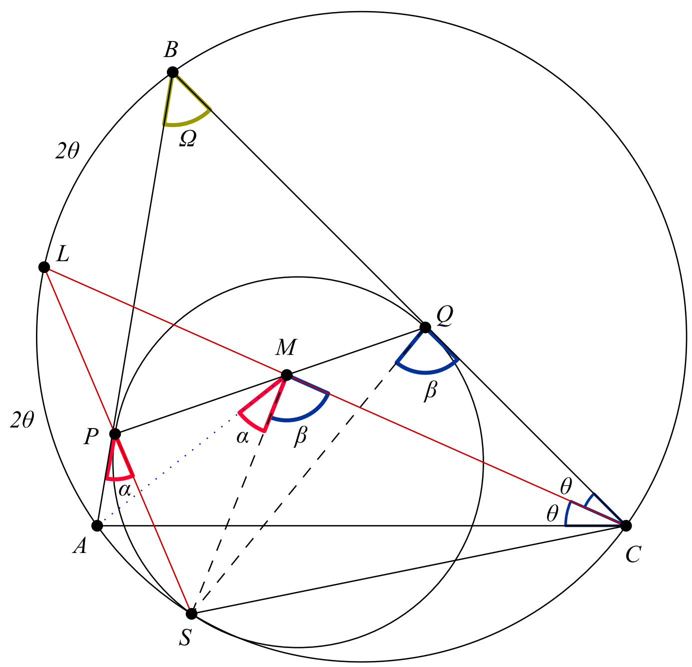


Figura 1: Los cuadriláteros $APMS$ y $CQMS$, son inscriptibles.

Usamos las mismas notaciones que en los lemas:

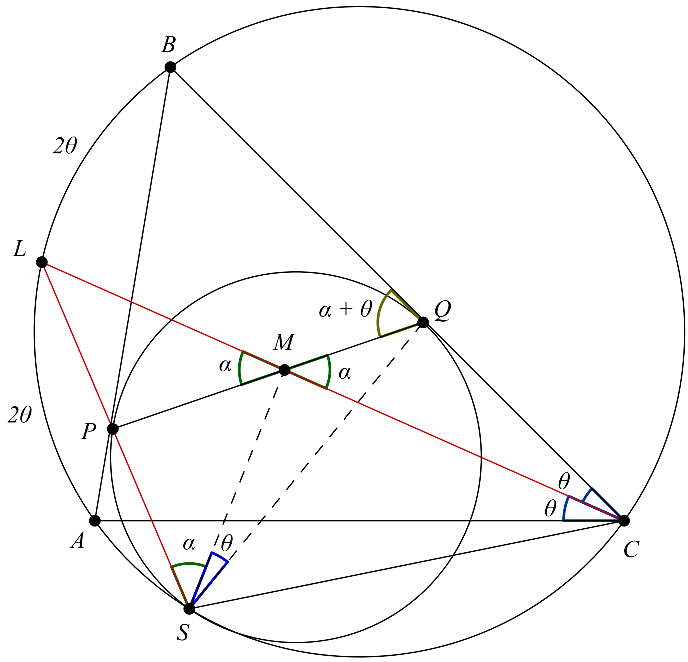
Para la solución del problema: tracemos las rectas SP (secante a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en L) y LC, secante al segmento PQ en M. Probaremos que el cuadrilátero $SMQC$ es inscriptible.

Del lema 522.1. sean los arcos AL y LB de medidas 2θ, entonces $m\measuredangle ACL = m\measuredangle BCL = \theta$, como $m \overset{\frown}{\mathrm{SP}} = m \overset{\frown}{\mathrm{SL}}$, tenemos que $m\measuredangle SQP = m\measuredangle SCL$, entonces el cuadrilátero $SMQC$ es inscriptible; de allí $m\measuredangle SCQ = m\measuredangle SMP$, y ya que $SABC$ es inscrito, entonces $m\measuredangle SAP = 180^{\circ} - m\measuredangle SCQ = 180^{\circ} - m\measuredangle SMP$, luego el cuadrilátero $APMS$ también es inscriptible.

Del triángulo isósceles PBQ: $m\measuredangle PQS + m\measuredangle SQC = 90^{\circ} + (m\measuredangle ABC)/2$, luego trasladando los ángulos en los cuadrilátero inscritos se concluye que $m\measuredangle AMC = 90^{\circ} + (m\measuredangle ABC)/2$ y como M es un punto de la bisectriz interior desde C, entonces del Lema 522.2. M es incentro. Finalmente BM deberá ser bisectriz, y como el triángulo PBQ es isósceles, entonces, M es punto medio de $\overline{PQ}$ e incentro de ABC.

ANEXOS

Segunda solución



Lema 522.a. *Sea L punto medio del arco AB de una circunferencia, y sea una segunda circunferencia tangente internamente a la primera en S y tangente a $\overline{AB}$ en P, si SP interseca a la primera circunferencia en L, entonces $LA^2 = LB^2 = (LP)(LS)$.*

Lema 522.b. *Si la bisectrz interior desde C, de un triángulo ABC, interseca a la circunferencia circunscrita en L y un punto M en dicha bisectriz, es tal que $LM = LA = LB$, entonces M es incentro del triángulo ABC.*

En el problema: tracemos las rectas SP (secante a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en L) y LC, secante al segmento PQ en M, como ya probamos que el cuadrilátero $SMQC$ es inscriptible, usaremos ese resultado para demostrar que $LM = LA = LB$

Aprovechemos que el cuadrilátero $SMQC$ es inscriptible, entonces si $m\measuredangle LMP = \alpha$, se tiene que $m\measuredangle QMC = \alpha$, además $m\measuredangle MSQ = m\measuredangle QCM = \theta$ y $m\measuredangle MQB = \alpha + \theta = m\measuredangle PSQ$, de allí $m\measuredangle PSM = \alpha$.

En el triángulo LMS, como $m\measuredangle LMP = m\measuredangle LSM = \alpha$, entonces $LM^2 = (LP)(LS)$, como del lema 552.a se tiene que $LA^2 = LB^2 = (LP)(LS)$, entonces $LM = LA = LB$.

Finalmente, del Lema 552.b M es incentro del triángulo ABC.

Tercera solución (Autor - No se conocen referencias)

Para la solución del problema: tracemos las rectas SP (secante a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en L) y CL, la que por el lema 522.1 será bisectriz interior del triángulo ABC; tracemos las rectas SQ (secante a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en H) y AH, la que por el lema 522.1 será bisectriz interior del triángulo ABC, si las rectas AH y CL son secantes en M, entonces M es incentro de ABC. Además, por el teorema de Pascal aplicado al hexágono $AHSLCBA$, los puntos P, M y Q son colineales. La parte final se concluye de inmediato.

PROBLEMA 522 (Variación) ***del Problema 522 (Triángulos Cabri)***

Sea ABC un triángulo acutángulo. Una circunferencia w es tangente a las prolongaciones de BA y a BC en P y Q respectivamente, y también es tangente a la circunferencia circunscrita a ABC en un punto S. Demostrar que el punto medio de $\overline{PQ}$ es el excentro de ABC (figura 2).

Lema 522.3. *Si una circunferencia, es tangente externamente a una segunda circunferencia, en S, y a la prolongación de una de sus cuerdas $\overline{BA}$, en P, entonces la recta PS, biseca al arco AB que contiene a S.*

Lema 522.4. *Si en un triángulo ABC, M es un punto de su bisectriz exterior trazada desde C y, si además, $m\measuredangle AMC = 90^o - (m\measuredangle ABC)/2$. Entonces M es excentro del triángulo ABC.*

Para la solución del problema: tracemos las rectas SP (secante a la circunferencia circunscrita al triángulo ABC en L) y LC, secante al segmento PQ en M. Probaremos que el cuadrilátero $SMQC$ es inscriptible.

Del lema 522.3. sean los arcos AL y LB de medidas 2θ, entonces $m\measuredangle ACM = m\measuredangle QCM = \theta$, como $m\ \overset{\frown}{\text{SP}}= m\ \overset{\frown}{\text{SL}}$, tenemos que $m\measuredangle SQP = m\measuredangle SCM$, entonces el cuadrilátero $SMQC$ es inscriptible; de allí $m\measuredangle SCQ = m\measuredangle SMP$, y ya que $SABC$ es inscrito, entonces $m\measuredangle SAP = 180^o - m\measuredangle SCQ = 180^o - m\measuredangle SMP$, luego cuadrilátero $APMS$ también es inscriptible.

Del triángulo isósceles PBQ: $m\measuredangle PQS + m\measuredangle SQC = 90^o - (m\measuredangle ABC)/2$.

Trasladando los ángulos en los cuadrilátero inscritos se concluye que $m\measuredangle AMC = 90^o - (m\measuredangle ABC)/2$ y como M es un punto de la bisectriz exterior desde C, entonces del Lema 522.4. M es excentro. Finalmente BM deberá ser bisectriz interior, y como el triángulo PBQ es isósceles, entonces, M es punto medio de $\overline{PQ}$ y excentro de ABC.

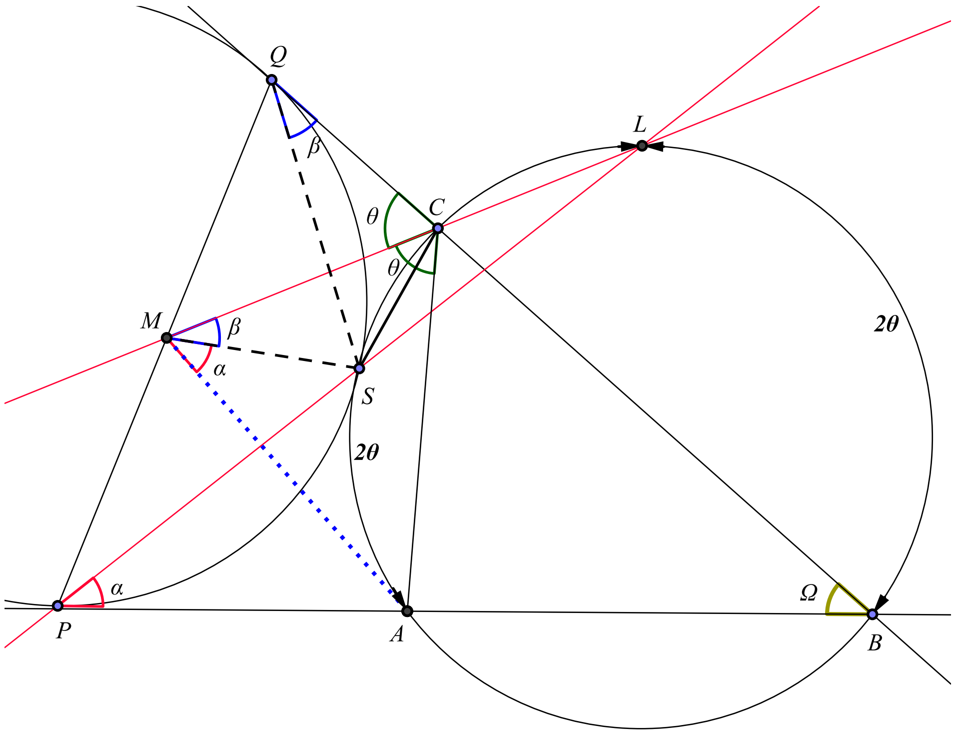


Figura 2: Ahora el punto medio de PQ es excentro de ABC.

Otra varición del problema se puede conseguir Así:

PROBLEMA 522 (Variación2) ***del Problema 522 (Triángulos Cabri)***

Sea ABC un triángulo acutángulo y BB' una ceviana. Una circunferencia w es tangente a la recta AB en P y a la recta CB' en Q. Demuestre que el incentro o un excentro del triángulo ABC está contenido en la recta PQ (figura 3).

Trazamos la recta PS y la bisectriz CL, se prueba completando las medidas angulares que el cuadrilátero $MCSQ$ es inscriptible, de allí se deduce directamente que $LM^2 = (LP)(LS)$, es decir $LB = LM = LA$, de donde M es incentro de ABC.

PROBLEMA 522 (Generalización) ***del Problema 522 (Triángulos Cabri)***

Sea ABC un triángulo acutángulo. Una circunferencia w es tangente a AB y a AC en P y Q respectivamente, y también es tangente, en un punto S, a la circunferencia que pasa por C y por B secante a AB y a AC en X y Y; de modo que S está en el arco que no contiene a X. Demuestre que el incentro del triángulo CBY está ubicado sobre PQ (figura 4).

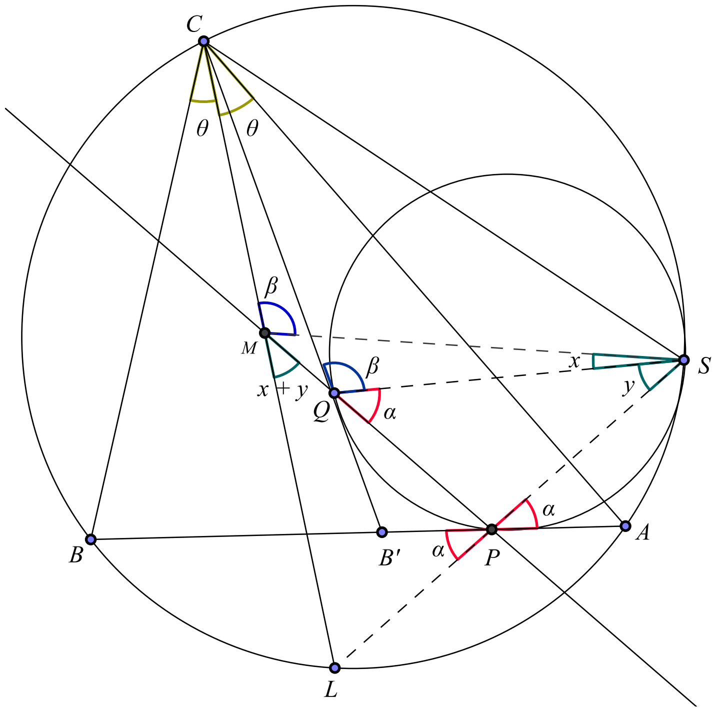


Figura 3: Ahora la recta PQ pasa por el incentro de ABC.

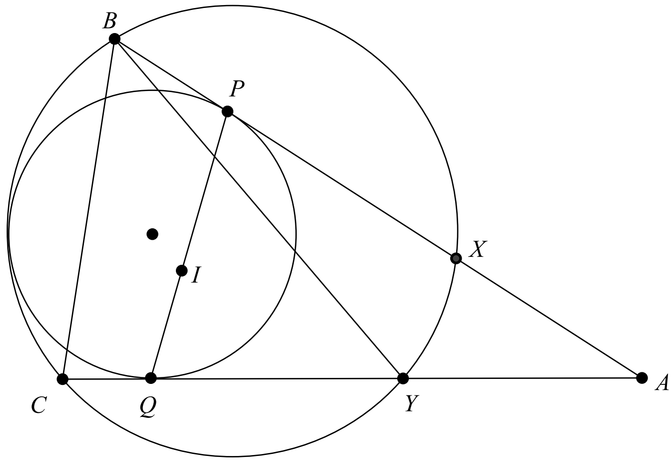


Figura 4: I, un punto de $\overline{PQ}$, es incentro del triángulo CBY.

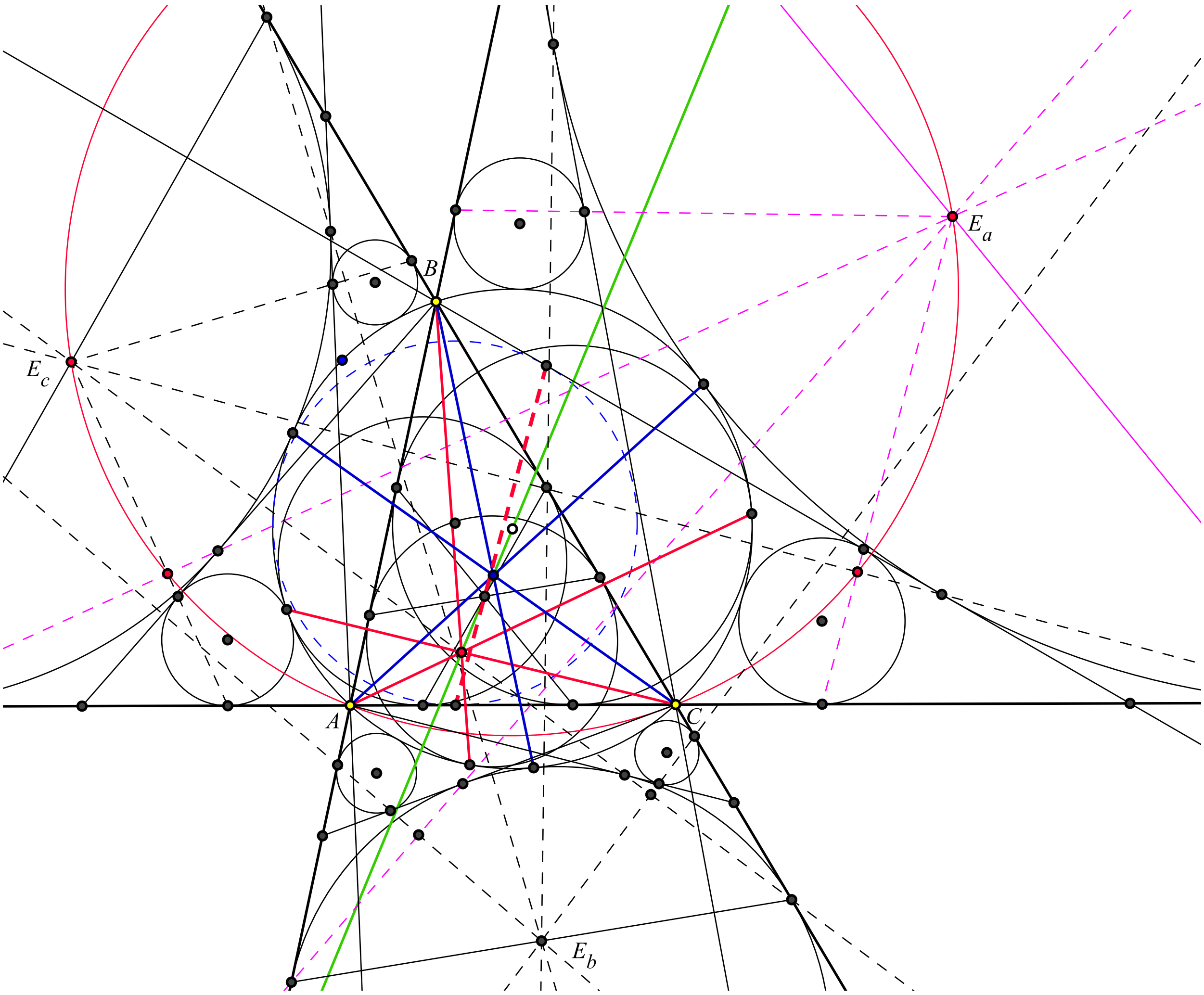


Figura 5: El problema 522, (TriángulosCabri) nos invita a investigar sobre una interesante secuencia de concurrencias en el incentro o en el excentro. A continuación se muestra una figura donde se aprecia el triángulo ABC con las concurrencias en los excentros E_a, E_b, E_c y en el incentro I. Y la alineación de 4 puntos en la línea de color verde.