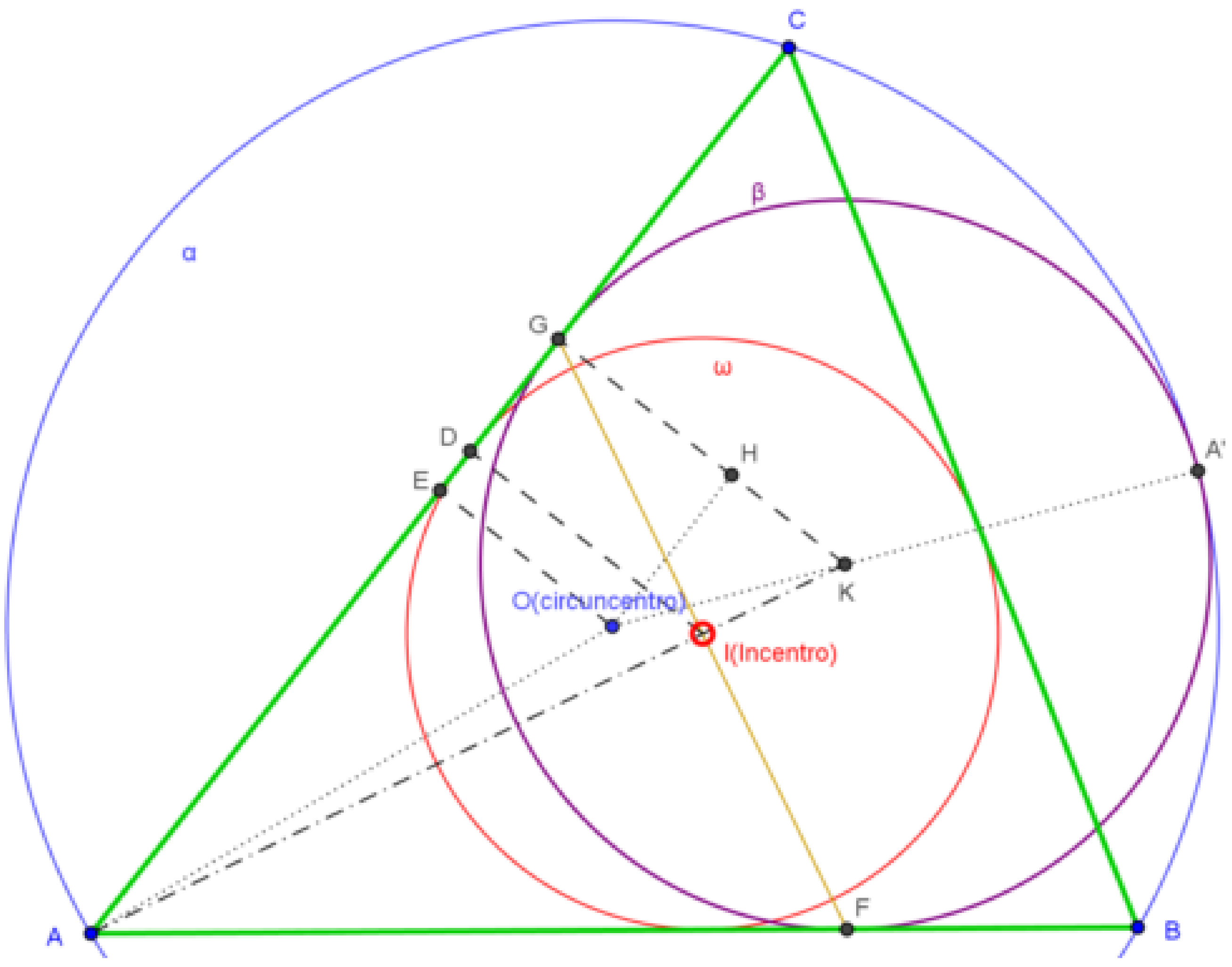
Propuesto por César Beade Franco, I. E. S. Fernando Blanco, Cee, A Coruña.

Problema 702.- *Sea ABC un triángulo, α la circunferencia circunscrita a ABC, y β la circunferencia tangente a los lados AB en F (interior a AB) y AC en G (interior a AC) y a α. Demostrar que el incentro de ABC es el punto medio del segmento FG.*

Chiriac, L (2009): Competitive Geometry. Editura Pru International.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, Profesor de Matemáticas jubilado, de Salamanca.



Vamos a comenzar calculando la longitud r_a del radio de la circunferencia β, de centro K. Se tiene $AE = \frac{b}{2} = R \cdot senB$, $OE = R \cdot \cos B$, $AG = r_a \cdot \cot\frac{A}{2}$, siendo R el radio de α y r el de la circunferencia inscrita ω.

Construimos el triángulo rectángulo OHK, cuyos lados son:

$OK = R - r_a$, $HK = r_a - OE = r_a - R \cdot \cos B$ y $OH = AG - AE = r_a \cdot \cot\frac{A}{2} - R \cdot \operatorname{sen} B$.

Aplicando el teorema de Pitágoras, y cambiando r_a por x, tenemos la siguiente ecuación:

$$(R - x)^2 = (x - R \cdot \cos B)^2 + \left(x \cdot \cot\frac{A}{2} - R \cdot \operatorname{sen} B\right)^2$$

Desarrollando y agrupando términos se llega a

$$\cot^2\frac{A}{2} \cdot x^2 = 2R\left(\operatorname{sen} B \cdot \cot\frac{A}{2} + \cos B - 1\right)x$$

y despreciando la solución nula, se obtiene

$$\begin{aligned} x = 2R \cdot \left(\operatorname{sen} B \cdot \cot\frac{A}{2} + \cos B - 1\right) \cdot \tan^2\frac{A}{2} \\ &= 2R \cdot \tan^2\frac{A}{2} \cdot \left(2 \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \cos\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{A}{2} - 2 \cdot \operatorname{sen}^2\frac{B}{2}\right) \\ &= 4R \cdot \tan^2\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \left(\cos\frac{B}{2} \cdot \cot\frac{A}{2} - \operatorname{sen}\frac{B}{2}\right) \\ &= \frac{4R \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \cdot \left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2}\right) \\ &= \frac{4R \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \cdot \cos\frac{A+B}{2} = \frac{4R \cdot \operatorname{sen}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cdot \operatorname{sen}\frac{C}{2}}{\cos^2\frac{A}{2}} \end{aligned}$$

El numerador de esa expresión es el radio de la circunferencia inscrita r.[1]

Obtenemos finalmente para el radio de β la expresión más manejable de

$$r_a = \frac{r}{\cos^2\frac{A}{2}}$$

Para demostrar que I es el punto medio de FG, bastará que probemos que la longitud de AG es la del segmento que determina en el lado AC, la perpendicular a la bisectriz por I. Esta longitud, que ya calculamos en el problema nº 690 es $\frac{2r}{\operatorname{sen} A} = \frac{bc}{s}$.

Veamos si es así:

$$AG = r_a \cdot \cot\frac{A}{2} = \frac{r}{\cos^2\frac{A}{2}} \cdot \cot\frac{A}{2} = \frac{2r}{\operatorname{sen} A} = \frac{bc}{s}$$

■

---

[1] De $\operatorname{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}$ y expresiones análogas variando el ángulo y de las expresiones del área en función de R y r, $Área\,(ABC) = rs = \frac{abc}{4R}$ se puede llegar a ese resultado.