

Problema 702.- (Propuesto por César Beade Franco, I.E.S. Fernando Blanco).

Sea ABC un triángulo, α la circunferencia circunscrita a ABC y β la circunferencia tangente a los lados AB en F (interior a AB) y AC en G (interior a AC) y a α . Demostrar que el incentro de ABC es el punto medio del segmento FG .

Resolución: (Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva)

A lo largo de la resolución del problema emplearemos la notación habitual en la geometría del triángulo. Sea I el incentro del triángulo ABC , J el centro de la circunferencia tangente a los lados AB y AC y a la circunferencia circunscrita a ABC y x el radio de la circunferencia centrada en J . Obviamente, el punto J pertenece a la bisectriz interior que parte del vértice A . Por potencia del punto J respecto de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC tenemos

$$x(2R - x) = \frac{x}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \left(2R \cos \frac{B-C}{2} - \frac{x}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} \right) \quad [1]$$

ya que $AJ = \frac{x}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$, y es bien sabido que la cuerda trazada desde el vértice A en la circunferencia circunscrita mide $2R \cos \frac{B-C}{2}$. En consecuencia, al despejar x de la relación [1] obtenemos

$$x = \frac{2R \operatorname{sen}\frac{A}{2} \left(\operatorname{sen}\frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right)}{-\cos^2 \frac{A}{2}}$$

Por otra parte, es claro que el triángulo AFG es isósceles y es conocido que tenemos $AI = 4R \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}$ para todo triángulo.

$$\text{Además} \quad AI = AG \cdot \cos \frac{A}{2} = x \cdot \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}$$

y, en consecuencia, la proposición quedará demostrada si se cumple la identidad

$$\frac{2R \operatorname{sen}\frac{A}{2} \left(\operatorname{sen}\frac{A}{2} - \cos \frac{B-C}{2} \right)}{-\cos^2 \frac{A}{2}} \cdot \frac{\cos^2 \frac{A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}} = 4R \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2}$$

que es cierta, ya que tenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} \cos \frac{B-C}{2} - \operatorname{sen}\frac{A}{2} &= 2 \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} + \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2} \\ &= \operatorname{sen}\frac{A}{2} + 2 \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2} \Leftrightarrow \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} - \operatorname{sen}\frac{B}{2} \operatorname{sen}\frac{C}{2} = \operatorname{sen}\frac{A}{2} \\ &\Leftrightarrow \cos \left(\frac{B+C}{2} \right) = \operatorname{sen}\frac{A}{2} \Leftrightarrow \cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2} \right) = \operatorname{sen}\frac{A}{2} \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ■

---oooOooo---