

Problema 523. En un triángulo ABC , se construye un cuadrado con dos vértices sobre BC , un vértice A_3 sobre AB y otro A_4 sobre AC . Se definen de manera semejante los puntos B_3 , B_4 y C_3 , C_4 . Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos AA_3A_4 , BB_3B_4 , CC_3C_4 son mutuamente tangentes.

<http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335>

Soluzione di Ercole Suppa.

Il quadrato inscritto nel triangolo $\triangle ABC$, con due vertici sul lato BC , può essere ottenuto con la costruzione indicata nella figura seguente.

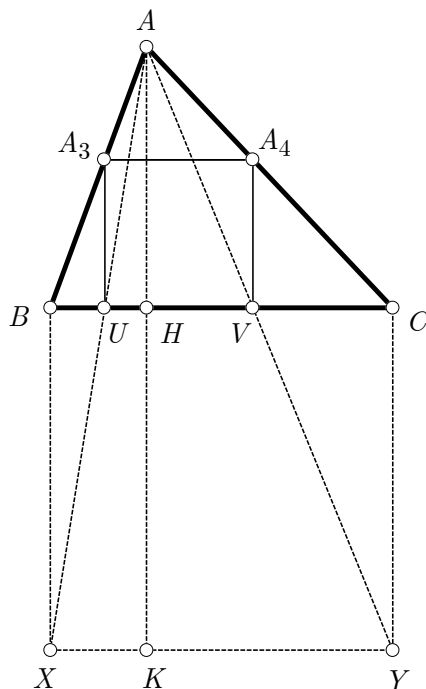


FIGURA 1

Per calcolare il lato ℓ_a di tale quadrato ed il raggio ρ_a della circonferenza circoscritta ad $\triangle AA_3A_4$ utilizziamo le notazioni introdotte nelle figure 1 e 2.

Dalla similitudine dei triangoli $\triangle AUV$ ed $\triangle AXY$ abbiamo:

$$\begin{aligned}
 UV : XY &= AH : AK \quad \Rightarrow \\
 \ell_a : a &= h_a : (a + h_a) \quad \Rightarrow \quad \ell_a = \frac{ah_a}{a + h_a} \quad (1)
 \end{aligned}$$

L'omotetia di centro A e rapporto $k = \frac{AB}{AA_3}$ trasforma $\triangle AA_3A_4$ in $\triangle ABC$ ed (O_a) nel circoncerchio (O) .

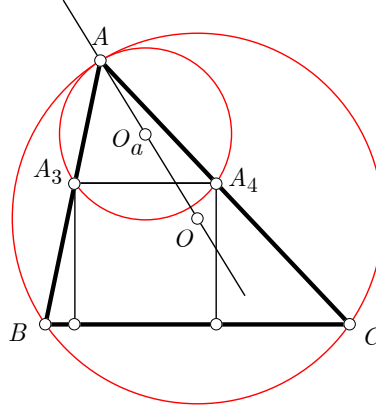


FIGURA 2

Pertanto i punti A, O_a, O sono allineati e, tenuto conto di (1), risulta

$$R : \rho_a = a : \ell_a \quad \Rightarrow$$

$$\rho_a = \frac{R \cdot \ell_a}{a} = \frac{Rh_a}{a + h_a} = \frac{\frac{abc}{4\Delta} \cdot \frac{2\Delta}{a}}{a + h_a} = \frac{bc}{2(a + h_a)} \quad (2)$$

Analoghe formule valgono per i raggi delle circonferenze $(O_b), (O_c)$.

Dimostriamo ora che che le circonferenze $(O_a), (O_b)$ sono tangenti, verificando che la distanza tra i loro centri è uguale alla somma dei raggi.

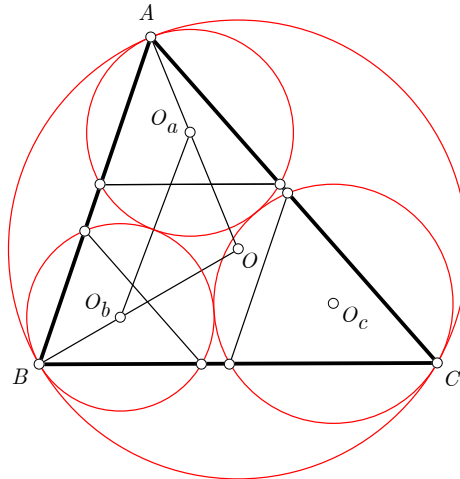


FIGURA 3

Dal teorema del coseno applicato a $\triangle OO_aO_b$, tenuto conto che $c = 2R \sin C$ e $\angle O_aOO_b = 2C$, discende che:

$$\begin{aligned}
(O_aO_b)^2 &= (OO_a)^2 + (OO_b)^2 - 2 \cdot OO_a \cdot OO_b \cdot \cos 2C = \\
&= (R - \rho_a)^2 + (R - \rho_b)^2 - 2(R - \rho_a)(R - \rho_b)(1 - 2\sin^2 C) = \\
&= (R - \rho_a)^2 + (R - \rho_b)^2 - 2(R - \rho_a)(R - \rho_b) + 4\sin^2 C(R - \rho_a)(R - \rho_b) = \\
&= (\rho_a - \rho_b)^2 + \frac{c^2}{R^2} \left(R - \frac{Rh_a}{a + h_a}\right) \left(R - \frac{Rh_b}{b + h_b}\right) = \\
&= (\rho_a - \rho_b)^2 + \frac{ac}{a + h_a} \cdot \frac{bc}{a + h_a} = \\
&= (\rho_a - \rho_b)^2 + 4 \cdot \frac{ac}{2(a + h_a)} \cdot \frac{bc}{2(a + h_a)} = \\
&= (\rho_a - \rho_b)^2 + 4\rho_a\rho_b = \\
&= (\rho_a + \rho_b)^2
\end{aligned}$$

Allora $O_aO_b = \rho_a + \rho_b$ e ciò garantisce che le circonferenze (O_a) e (O_b) sono tangenti esternamente. Allo stesso modo si dimostra la tangenza delle altre coppie di circonferenze ed il problema è risolto. $\square$