

Problema 523

En un triángulo ABC , se construye un cuadrado con dos vértices sobre BC , un vértice A_3 sobre AB y otro A_4 sobre AC . Se definen de manera semejante los puntos B_3, B_4 y C_3, C_4 . Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos $AA_3A_4, BB_3B_4, CC_3C_4$ son mutuamente tangentes.

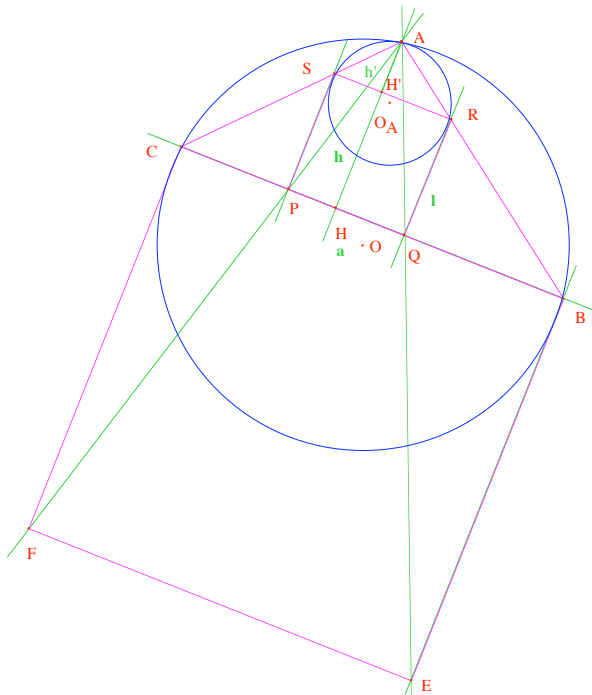
<http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335>

Quadrati inscritti in triangoli

Floor van Lamoen describe in un bellissimo articolo¹ del 2004 le procedure che consentono di costruire quadrati in un triangolo. Nel problema in oggetto si tratta di quadrati aventi due vertici consecutivi su un lato del triangolo e gli altri due situati sui rimanenti lati, uno su un lato e l'altro sull'altro lato. *Floor van Lamoen* chiama tali quadrati di tipo 1.

La costruzione di un tale quadrato è descritta in quel che segue. Dato il triangolo ABC , dalla retta per B e C si costruisce il quadrato di lato BC esterno al triangolo. Le rette AF ed AE individuano su BC i punti P e Q . Con le perpendicolari a BC condotte rispettivamente da P e Q si individuano i punti R su AB ed S su CA .

Vediamo che il processo in oggetto è una omotetia di centro A e rapporto $k=SA/CA$. In tale omotetia al triangolo ABC è associato il triangolo ARS , al quadrato esterno di lato BC è associato il quadrato $PQRS$. La circonferenza circoscritta ad ABC con centro O ha come corrispondente, nella detta omotetia, la circonferenza circoscritta al triangolo ARS con centro O_A . Tali circonferenze sono *tangenti* internamente nel punto A .



Dette h ed h' le altezze dei triangoli ABC ed ARS rispettivamente relative ai lati BC ed RS , abbiamo per l'omotetia data $k = h'/h = l/a$. Da tale relazione abbiamo $l = ah'/h = a(h - l)/h$, donde $lh + al = ah$ e $l(h + a) = ah$ da cui $k = l/a = h/(h + a)$.

¹ F. M. van Lamoen, Inscribed squares, *Forum Geom.*, Volume 4 (2004) 207–214.

La conoscenza di k come funzione di h ed a consente di individuare il raggio R_a della circonferenza circoscritta al triangolo ARS . Detto R il raggio della circonferenza circoscritta ad ABC , abbiamo:

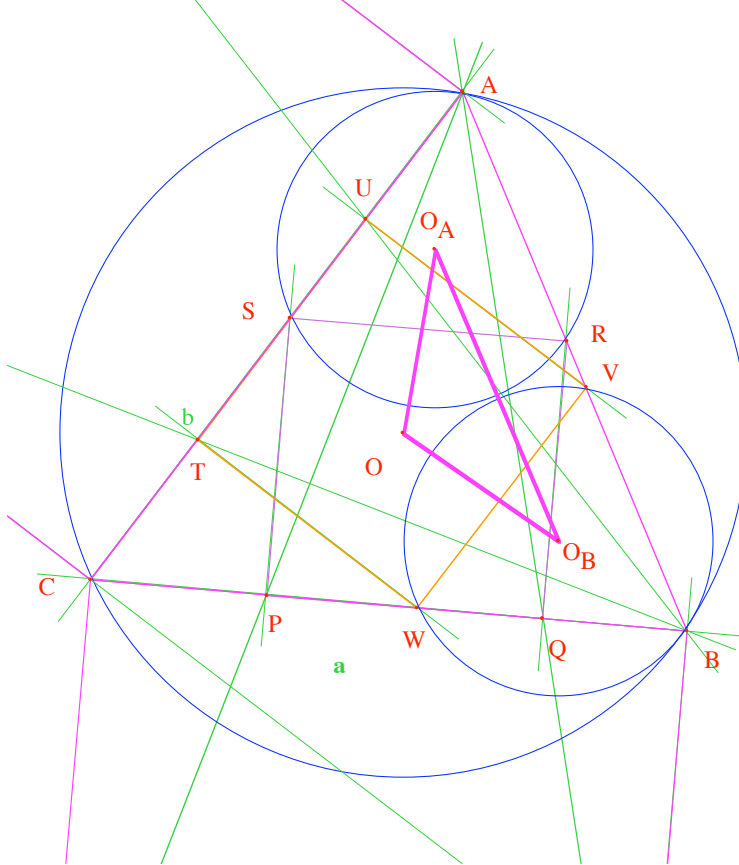
$$R_a = \frac{hR}{h+a} = \frac{\frac{2S}{a}R}{\frac{2S}{a}+a} = \frac{2SR}{2S+a^2} = \frac{abc}{2(2S+a^2)}$$

essendo $abc = 4RS$.

I circoli di Lucas

Con un procedere analogo, costruiamo adesso il quadrato esterno al triangolo ABC sul lato CA e quello interno $TWVU$ allo stesso triangolo. Vediamo che l'omotetia stavolta ha centro in B e rapporto k uguale a BV/VA . Tale trasformazione manda il triangolo ABC nel triangolo VWB , la circonferenza circoscritta di centro O ad ABC nella circonferenza circoscritta a VWB di centro O_B .

Antreas P. Hatzipolakis e *Paul Yiu* in un brillante articolo² del 2001 mostrano che le circonferenze di centro O_A e raggio $O_A A$ e quella di centro O_B e raggio $O_B B$ sono *tangenti esternamente*. Più precisamente, con $OO_A = R - R_a$ e $OO_B = R - R_b$ gli Autori provano che la distanza tra i centri O_A e O_B è uguale alla somma dei raggi. In simboli: $O_A O_B = R_a + R_b$.



² A.P. Hatzipolakis and P. Yiu, The Lucas circles, Amer. Math. Monthly, 108 (2001) 444 – 446.

Detti *Autori*, adoprano in primis il *teorema del coseno* applicato al triangolo OO_AO_B , nel quale l'angolo di vertice O contrassegnato con $\angle O_AOO_B$ è uguale al doppio dell'angolo di vertice C , essendo il primo angolo al centro ed il secondo angolo alla circonferenza che insistono su uno stesso arco.

In quel che segue si riportano alcuni passaggi fondamentali.

$$\begin{aligned} |O_AO_B|^2 &= (R - R_a)^2 + (R - R_b)^2 - 2(R - R_a)(R - R_b)\cos 2C = \\ &= (R - R_a)^2 + (R - R_b)^2 - 2(R - R_a)(R - R_b)(1 - 2\sin^2 C) \end{aligned}$$

essendo:

$$\cos 2C = \cos^2 C - \sin^2 C = 1 - \sin^2 C - \sin^2 C = 1 - 2\sin^2 C$$

da cui abbiamo:

$$|O_AO_B|^2 = (R_a - R_b)^2 + 4(R - R_a)(R - R_b)\sin^2 C$$

ed avendo, per mezzo della legge dei seni, la relazione $c = 2R \sin C$, possiamo scrivere:

$$|O_AO_B|^2 = (R_a - R_b)^2 + 4R_aR_b\sin^2 C \frac{4R^2\sin^2 C}{c^2}$$

dalla quale essendo:

$$\frac{4R^2\sin^2 C}{c^2} = 1$$

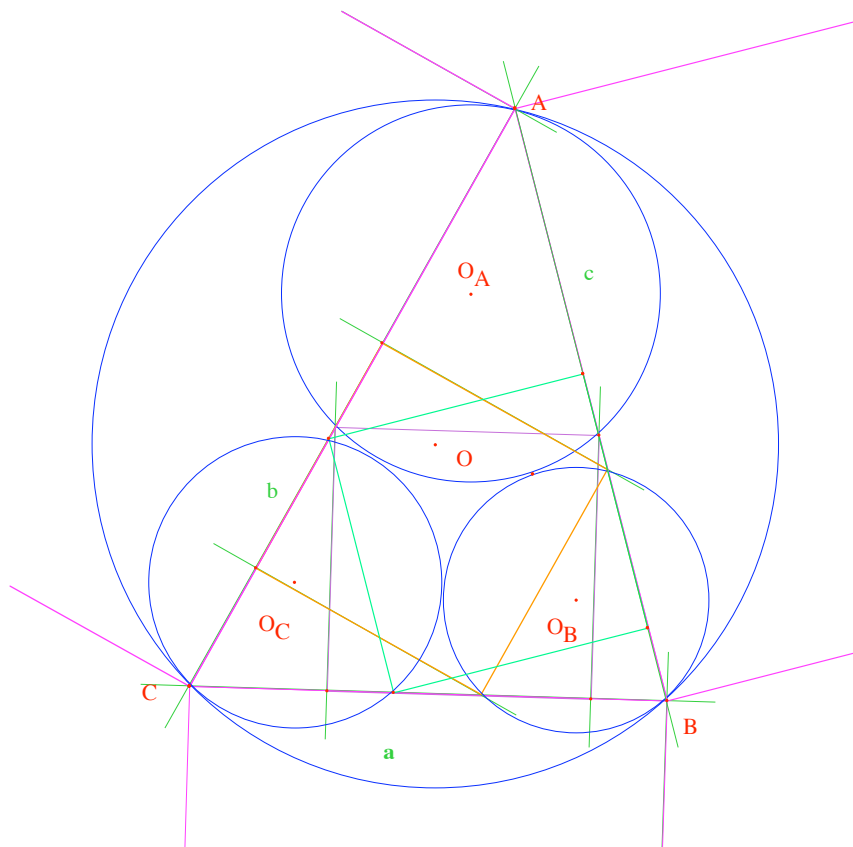
si ottiene:

$$|O_AO_B|^2 = (R_a - R_b)^2 + 4R_aR_b = (R_a + R_b)^2$$

Tale risultato prova che le circonferenze in oggetto sono *tangenti esternamente*.

Con la procedura già descritta possiamo costruire un terzo quadrato con il lato situato sopra il lato AB ed ottenere un'altra circonferenza tangente *internamente* alla circonferenza circoscritta al triangolo ABC nel punto C e tangente *esternamente* alle due circonferenze già mostrate. Tali circonferenze prendono il nome di *circoli di Lucas*, dal matematico *Eduard Lucas* vissuto dal 1842 al 1891.

La situazione problematica è descritta con Cabri nell'immagine che segue.



Bibliografia:

- [1] F. M. van Lamoen, Inscribed squares, *Forum Geom.*, Volume 4 (2004) , 207–214
- [2] A.P. Hatzipolakis and P. Yiu, The Lucas circles, *Amer. Math. Monthly*, 108 (2001), 444 – 446
- [3] P. Yiu, Introduction to the Geometry of the Triangle, Summer 2001, Department of Mathematics, Florida Atlantic University, Version 2.0402 April 2002