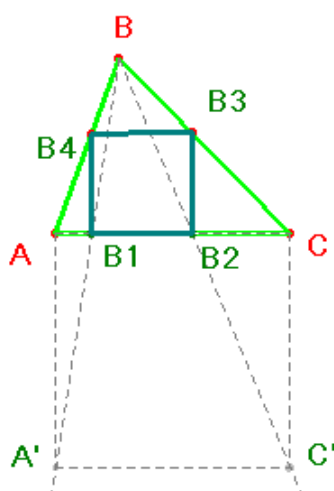


Problema 523.- En un triángulo ABC , se construye un cuadrado con dos vértices sobre BC , un vértice A_3 sobre AB y otro A_4 sobre AC . Se definen de manera semejante los puntos B_3, B_4 y C_3, C_4 . Demostrar que las circunferencias circunscritas a los triángulos $AA_3A_4, BB_3B_4, CC_3C_4$ son mutuamente tangentes.

<http://www.mathlinks.ro/viewtopic.php?t=5335>

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S. Fray Luis de León (Salamanca)

Para insertar uno de estos cuadrados se procede según se explica en el problema nº 75 de esta revista. De la semejanza de los triángulos BB_1B_2 y $BA'C'$ resulta:



$$\frac{h_B}{h_B + b} = \frac{B_1B_2}{b}$$

que nos permite calcular el lado de ese cuadrado:

$$B_1B_2 = \frac{bh_B}{h_B + b}$$

De lo anterior se deduce que el triángulo BB_3B_4 , semejante al BCA puede obtenerse a partir de éste por una homotecia de centro B y razón $\frac{h_B}{b+h_B} = \frac{2\Delta}{b^2+2\Delta}$ donde Δ es el área de ABC . De ahí también deducimos

que el círculo circunscrito al triángulo BB_3B_4 se transforma por esa homotecia en el círculo circunscrito a ABC , tangentes en B .

Para demostrar la tangencia de las circunferencias circunscritas vamos a probar que la distancia entre los centros de dos de ellas es igual a la suma de los radios.

En el triángulo OC_aC_c , aplicando el teorema del coseno tenemos para el lado C_aC_c la relación: $(C_aC_c)^2 = (R - R_c)^2 + (R - R_a)^2 - 2(R - R_c)(R - R_a) \cos 2B =$

$$= [(R - R_c) - (R - R_a)]^2 + 2(R - R_c)(R - R_a)(1 - \cos 2B) =$$

$$= (R_c - R_a)^2 + 4(R - R_c)(R - R_a) \sin^2 B. \quad (*)$$

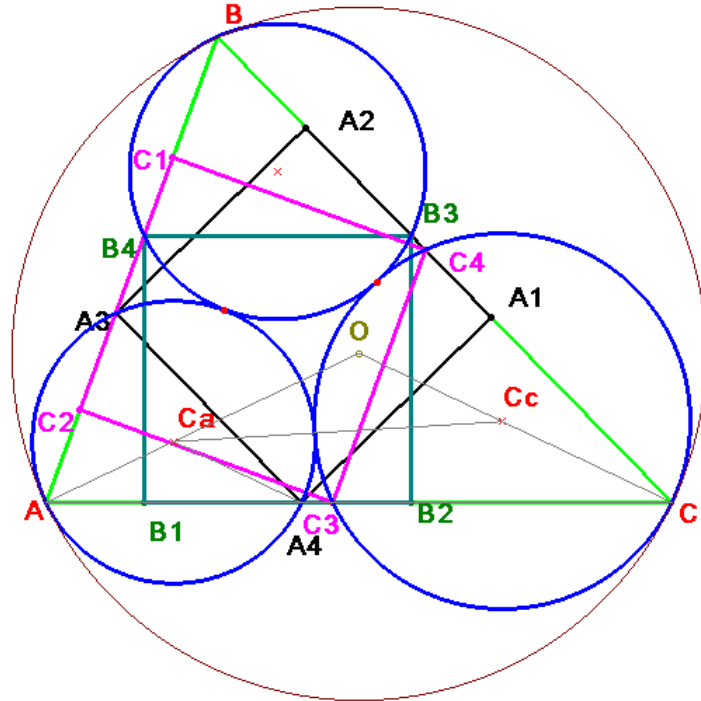
Las expresiones para los radios de los circuncírculos, teniendo en cuenta que son transformados por homotecias del circuncírculo del triángulo ABC son:

$$R_a = \frac{2R\Delta}{a^2+2\Delta} \text{ y } R_c = \frac{2R\Delta}{c^2+2\Delta}, \text{ de ahí operando resultan:}$$

$$(R - R_c)(R - R_a) = R^2 \cdot \frac{a^2 c^2}{(a^2 + 2\Delta) \cdot (c^2 + 2\Delta)}$$

$$R_c R_a = 4R^2 \cdot \frac{\Delta^2}{(a^2 + 2\Delta) \cdot (c^2 + 2\Delta)}$$

Se tiene



$$\frac{R_c R_a}{(R - R_c)(R - R_a)} = \frac{4\Delta^2}{a^2 c^2} = \left(\frac{2\Delta}{ac}\right)^2 = \left(\frac{2\Delta b}{4\Delta R}\right)^2 = \left(\frac{b}{2R}\right)^2 = \sin^2 B,$$

donde se han usado las expresiones del radio de la circunscrita, $R = \frac{abc}{4\Delta}$ y $b = 2R \sin B$. Así pues $4(R - R_c)(R - R_a) \sin^2 B = 4R_c R_a$ y sustituyendo en (*) tenemos finalmente:

$(C_a C_c)^2 = (R_c - R_a)^2 + 4R_c R_a = (R_c + R_a)^2$, que nos demuestra la tangencia de las circunferencias que pasan por A y C.