

Problema 525 de *triángulos cabri*. Sea H el ortocentro del triángulo ABC . Demostrar que las circunferencias de diámetros CH y AB son ortogonales.

Alasia, C. (1900): La reciente geometría del triángulo, problema 195, pag. 293.
Propuesto por Ercole Suppa.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

En primer lugar, consideramos la siguiente caracterización del ortocentro:

Propiedad 1. Sean ABC es un triángulo con circuncentro O , y H el punto del plano tal que $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$, entonces H es el ortocentro del triángulo ABC .

Demostración. En efecto, tenemos $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2 \cdot \overrightarrow{OM}$, siendo M el punto medio del segmento AB . Por ello, la recta CH es paralela a la recta OM y perpendicular a la recta AB . De la misma forma, las rectas AH y BH serán perpendiculares a las rectas BC y CA , respectivamente, por lo que H es el ortocentro de ABC .

Esta propiedad conduce rápidamente a la siguiente:

Propiedad 2. Dado un triángulo ABC con ortocentro H y circuncentro O , si M y N son los puntos medios de AB y CH , respectivamente, entonces el cuadrilátero $COMN$ es un paralelogramo.

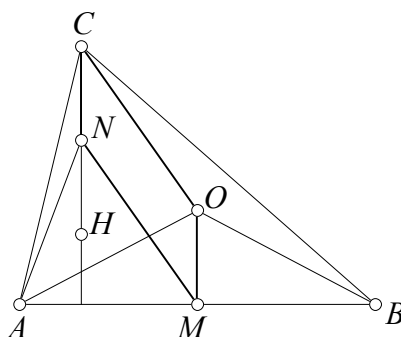


FIGURA 1

Demostración. Es evidente, ya que las rectas CN y OM son paralelas, y, además $CN = \frac{1}{2}CH = OM$.

Como consecuencia de la Propiedad 2 tenemos que $MN = OC = R$.

Ahora, para resolver el problema propuesto, basta comprobar que se cumple la relación $MN^2 = NC^2 + (\frac{1}{2}AB)^2$. En efecto, tenemos

$$MN^2 - NC^2 = R^2 - R^2 \cdot \cos^2 C = R^2 \cdot \sin^2 C = R^2 \cdot \left(\frac{c}{2R}\right)^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2.$$