Problema 526 de *triánguloscabri*. *Sean PA y QA dos segmentos isogonales respecto al ángulo A.*

Demostrar que las cuatro proyecciones de P y Q sobre AB y AC pertenecen a una circunferencia.

Alasia, C. (1900): La recente geometria del triangolo, problema 154, pag. 289. Propuesto por Ercole Suppa.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Sean U, V los pies de P sobre AB, AC, respectivamente y M, N los de Q.

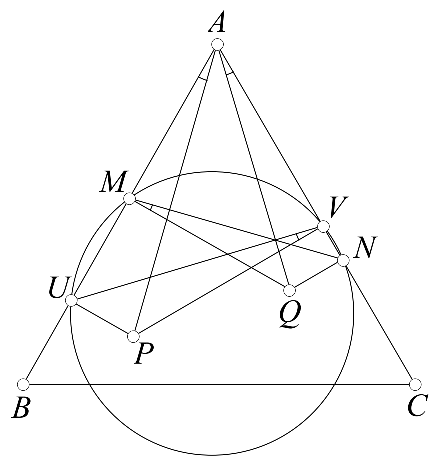

FIGURA 1

Sea $\theta = \angle BAP = \angle QAC$. Usando los cuadriláteros cíclicos $AUPV$ y $AMQN$ tenemos también $\angle PVU = \angle QMN = \theta$. En consecuencia tenemos $\angle AVU = 90° - \theta = \angle AMN$, resultando que los triángulos AMN y AVU, que también tienen el ángulo común A, son semejantes. Por tanto,

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AV}{AU} \Rightarrow AM \cdot AU = AN \cdot AV,$$

es decir los puntos M, N, U, V están sobre una misma circunferencia.