

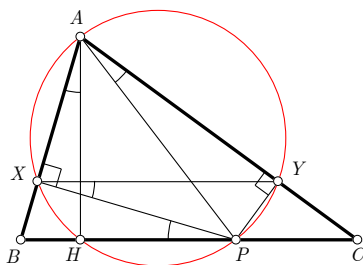
Problema 527. Encontrar un punto en la base de un triángulo dado de forma que desde él se trazan perpendiculares a los lados, la línea que una sus extremos sea paralela a la base. Resolver (1) trigonómicamente, (2) geoméricamente.

Carroll, L. (2005): Problemas de almohada. Nívola.

Pillow Problems, (traducción de Guillén Rojas, y Jesús Fernández)

Soluzione di Ercole Suppa.

ANALISI.



Supposto il problema risolto, sia AH l'altezza tracciata dal vertice A , sia $P \in BC$, siano X ed Y le proiezioni di P su AB , AC tali che $XY \parallel BC$.

Allora

$$\angle PXY = \angle XPB \quad (1)$$

in quanto angoli alterni interni formati dalle parallele XY e BC tagliate dalla trasversale PX .

I punti X , Y , H appartengono alla circonferenza di diametro AP e allora, dall'uguaglianza degli angoli alla circonferenza che insistono, su uno stesso arco abbiamo

$$\angle BAH = \angle XAH = \angle XPB \quad , \quad \angle PXY = \angle PAY \quad (2)$$

Da (1) e (2) segue che $\angle BAH = \angle PAY$, ossia le rette AH e PA sono coniugate isogonali. Pertanto il punto P verificante la proprietà richiesta può essere ottenuto con la seguente

COSTRUZIONE.

- tracciare l'altezza AH relativa al lato BC ;
- tracciare la retta ℓ coniugata isogonale di AH ;
- determinare il punto $P = BC \cap \ell$.

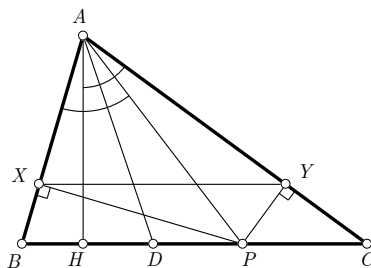
DIMOSTRAZIONE GEOMETRICA.

Dato che i punti A, X, H, P, Y sono conciclici, tenuto conto che $\angle HAX = \angle PAY$, abbiamo:

$$\angle BPX = \angle HPX = \angle HAX = \angle PAY = \angle PXY$$

e questo prova che le rette XY e BC sono parallele.

DIMOSTRAZIONE TRIGONOMETRICA.



Essendo $\angle XAH = \angle PAY$ abbiamo che

$$\angle XAP = \angle HAC = 90^\circ - C$$

e quindi

$$AX = AP \cdot \cos \angle XAP = AP \cdot \cos(90^\circ - C) = AP \cdot \sin C \quad (3)$$

$$AY = AP \cdot \cos \angle PAY = AP \cdot \cos \angle BAH = AP \cdot \cos(90^\circ - B) = AP \cdot \sin B \quad (4)$$

Dal teorema dei seni, tenuto conto di (3) e (4), segue che

$$\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B} = \frac{AX}{AY}$$

Pertanto i triangoli $\triangle AXY$ e $\triangle ABC$ sono simili, per cui $XY \parallel BC$. □