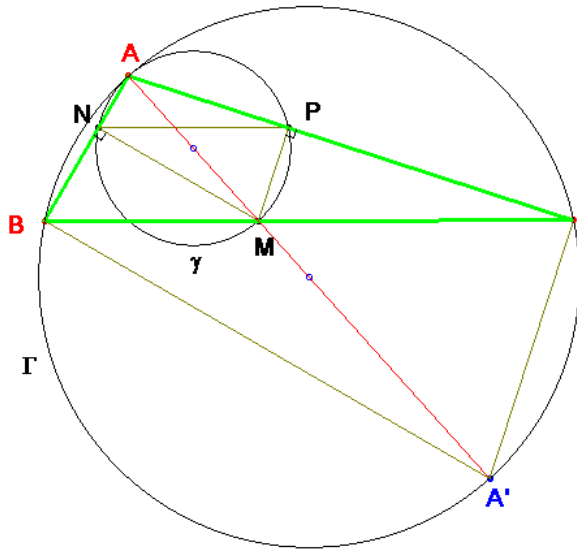


Problema 527.- Encontrar un punto en la base de un triángulo dado de forma que desde él se trazan perpendiculares a los lados, la línea que una sus extremos sea paralela a la base. Resolver (1) trigonómicamente, (2) geoméricamente.



Carroll, L. (2005): Problemas de almohada. Nívola. [Pillow Problems] (traducción de Guillén Rojas, y Jesús Fernández)

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del IES Fray Luis de León de Salamanca.

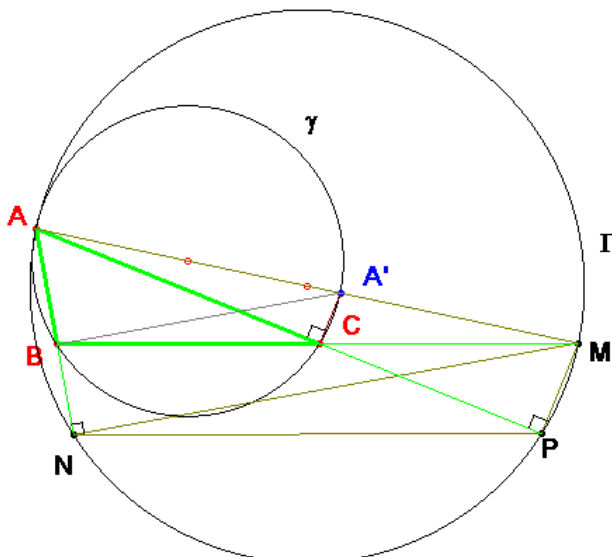
(1) Para fijar el punto M solución del problema observamos que el cuadrilátero $ANMP$ es inscriptible, por ello, $\angle MAP = \angle PNM$ y éste último igual a $\angle NMB = 90^\circ - B$, por alternos internos. De ahí se sigue que $\angle MAB = 90^\circ - C$ pues es lo que le falta a $\angle MAP$ para completar el ángulo A y $\angle NMA = C$. En el triángulo ABM conocemos sus ángulos y uno de sus lados. Podemos, pues, calcular el lado BM y así tener fijada la posición del punto solución. Aplicando el teorema de los senos a este triángulo podemos escribir

$$\frac{AB}{\sin(90^\circ - B + C)} = \frac{BM}{\sin(90^\circ - C)}$$

y despejando

$$BM = \frac{c \cdot \cos(C)}{\cos(B - C)}$$

Si el punto M es exterior a BC , como se muestra en la segunda figura, el cálculo es muy similar, tenemos también el cuadrilátero inscriptible $ANPM$ y con razonamientos parecidos llegamos a tener los valores de los ángulos del triángulo ABM ($A + (B - 90^\circ) = 90^\circ - C$, $B, 90^\circ - B + C$) con los cuales también podemos calcular la longitud de BM .



(2) Si es M el punto buscado sobre BC , interior al mismo (1ª figura), N y P los pies de las perpendiculares sobre los otros lados, tenemos que el cuadrilátero $ANMP$ es inscriptible o cíclico. Además el triángulo ANP es homotético al ABC . La homotecia que

pasa del primero al segundo, transforma la circunferencia γ en la que se inscribe $ANMP$ en Γ , la circunscrita a ABC , y que también circunscribe al cuadrilátero homólogo $ABA'C$. Por tanto A' se obtiene trazando desde C (o desde B) la perpendicular a AC (AB) y cortando con Γ , aunque es más sencillo considerar a A' como el punto de Γ diametralmente separado de A , pues AM es un diámetro de γ .

Si M es exterior a BC los puntos P y N están sobre el arco capaz de AM y amplitud 90° , por tanto es inscriptible $ANPM$ y los triángulos ANP y ABC son semejantes (homotéticos). En esa semejanza la circunferencias circunscritas se corresponden y por tanto, el homólogo de $ANPM$ es otro cuadrilátero cíclico $ABCA'$, donde A' , homólogo de M , es el extremo del diámetro de γ desde A , como en el caso anterior. Como A' es constructible, también lo es M .