Problema 528. Siendo A, B, C los ángulos de un triángulo ABC y ω el ángulo de Brocard, demostrar la relaciòn

$$3\cot\omega+\cot(A-\omega)+\cot(B-\omega)+\cot(C-\omega) = (\cot\omega)^3+\cot(A-\omega)\cot(B-\omega)\cot(C-\omega)$$

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid.

Gaceta de Matemáticas Elementales, (1905) Tomo II (editor A. Bozal Obejero)

Soluzione di Ercole Suppa.

Premettiamo i seguenti lemmi:

LEMMA 1. Se ω è l'angolo di Brocard vale la relazione

$$\cot\omega = \cot A + \cot B + \cot C \tag{1}$$

Dimostrazione. Questa proprietà è ben nota[1]. ■

LEMMA 2. Se A, B, C sono le ampiezze degli angoli di un triangolo ABC vale la relazione

$$\cot A\cot B + \cot A\cot C + \cot B\cot C = 1 \tag{2}$$

Dimostrazione.

$$\begin{aligned}
\sum_{\text{cyclic}} \cot A\cot B &= \cot A\cot B + (\cot A + \cot B)\cot(180^\circ - A - B) = \\
&= \cot A\cot B - (\cot A + \cot B)\cot(A+B) = \\
&= \cot A\cot B - (\cot A + \cot B)\frac{\cot A\cot B - 1}{\cot A + \cot B} = \\
&= \cot A\cot B - \cot A\cot B + 1 = 1
\end{aligned}$$ ■

Per dimostrare l'uguaglianza richiesta indichiamo con L, R il primo ed il secondo membro e poniamo $x = \cot A$, $y = \cot B$, $z = \cot C$.

[1] La dimostrazione è riportata, ad esempio, nel libro: *R. Honsberger, Episodes in nineteenth and twentieth century euclidean geometry*, pag.101

Allora, tenendo conto del LEMMA 1, abbiamo:

$$\begin{aligned}
L &= 3\cot\omega + \cot(A-\omega) + \cot(B-\omega) + \cot(C-\omega) = \\
&= 3(\cot A + \cot B + \cot C) + \frac{\cot\omega\cot A + 1}{\cot\omega - \cot A} + \frac{\cot\omega\cot B + 1}{\cot\omega - \cot B} + \frac{\cot\omega\cot C + 1}{\cot\omega - \cot C} = \\
&= 3(x+y+x) + \frac{(x+y+z)x+1}{y+z} + \frac{(x+y+z)y+1}{x+z} + \frac{(x+y+z)z+1}{x+y} = \\
&= \frac{\left(1+x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2\right)}{(x+y)(x+z)(y+z)} \cdot f(x,y,z)
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto $f(x,y,z) = \left(x^2+3xy+y^2+3xz+3yz+z^2\right)$.

Analogamente abbiamo che:

$$\begin{aligned}
R &= (\cot\omega)^3 + \cot(A-\omega)\cot(B-\omega)\cot(C-\omega) = \\
&= (\cot A + \cot B + \cot C)^3 + \frac{\cot\omega\cot A + 1}{\cot\omega - \cot A} \cdot \frac{\cot\omega\cot B + 1}{\cot\omega - \cot B} \cdot \frac{\cot\omega\cot C + 1}{\cot\omega - \cot C} = \\
&= (x+y+z)^3 + \frac{(x+y+z)x+1}{y+z} \cdot \frac{(x+y+z)y+1}{x+z} \cdot \frac{(x+y+z)z+1}{x+y} = \\
&= \frac{\left(1+x^2+2xy+y^2+2xz+2yz+z^2\right)}{(x+y)(x+z)(y+z)} \cdot g(x,y,z)
\end{aligned}$$

dove abbiamo posto

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) =& 1 + x^3y + 2x^2y^2 + xy^3 + x^3z + 5x^2yz + 5xy^2z + \\
&+ y^3z + 2x^2z^2 + 5xyz^2 + 2y^2z^2 + xz^3 + yz^3
\end{aligned}$$

Con un semplice calcolo si trova che:

$$f(x,y,z) - g(x,y,z) = (x+y+z-1)(x+y+z+1)(xy+xz+yz-1) = 0$$

in quanto $xy+yz+zx=1$, come discende dal LEMMA 2.

Allora $f(x,y,z) = g(x,y,z)$ e, di conseguenza, $L = R$. □