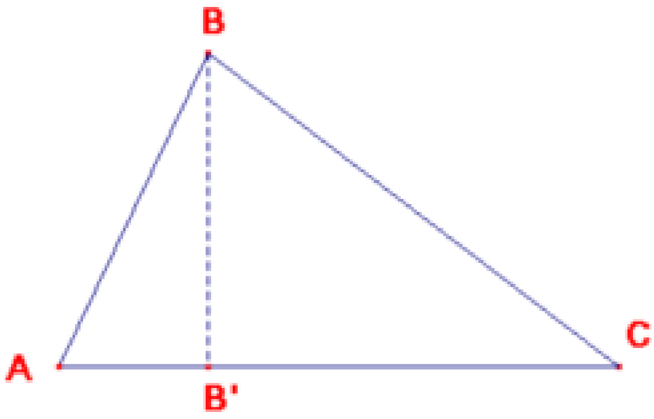
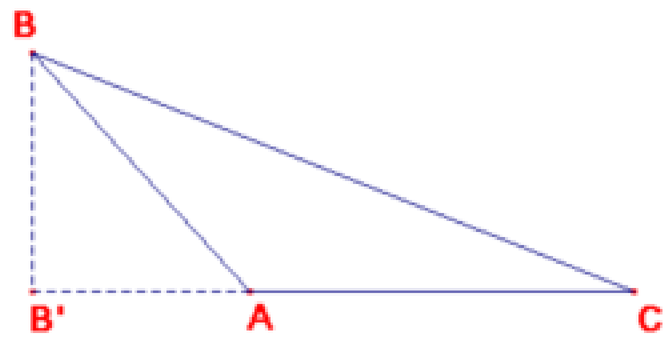
Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

***Problema 529**.- De entre todos los triángulos de perímetro fijo, determinar aquél que al girar alrededor de uno de sus lados engendra una figura de revolución de volumen máximo.*

Vicario, V. (2009). Comunicación personal.

Solución de Saturnino Campo Ruiz, profesor de Matemáticas del I.E.S.* Fray Luis de León *de Salamanca.





El cuerpo engendrado al girar se compone, en general, de dos conos unidos por la base, de radio *h=BB′*, la altura sobre el lado de giro, y alturas los dos segmentos *AB′* y *B′C* en que la altura divide al eje de giro. Por tanto, el volumen es igual al *de un cono de altura el lado de giro y cuyo radio de la base es la altura correspondiente*.

Si el triángulo es obtusángulo el volumen es la diferencia de los volúmenes de dos conos de igual base *BB′*. La diferencia de sus alturas es el lado de giro *b=AC* y también es cierta la afirmación anterior.

Aplicando la fórmula para el cálculo del volumen del cono, podemos poner $V=\frac{\pi}{3}\cdot h^2 b=\frac{\pi}{3}\frac{h^2b^2}{b}=\frac{\pi}{3}\frac{4\Delta^2}{b}$, donde $\Delta=\frac{b\cdot h}{2}$ es el área del triángulo. Y utilizando finalmente la fórmula de Herón, la función que ha de ser máxima es $V=\frac{4\pi}{3}\cdot\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{b}$ siendo *p* el semiperímetro.

Llamando a los lados *x*, *y* y *z*, donde el primero es el eje de giro, con la condición *x+y+z =2p* y prescindiendo de constantes llegamos a la función

$$f(x,y)=\frac{(p-x)(p-y)(x+y-p)}{x}$$

Para que esta función tenga un máximo, es condición necesaria la anulación de sus derivadas parciales de primer orden, así pues, calculando tenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(y-p)\cdot\frac{x^2+p(y-p)}{x^2}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(x-p)\cdot\frac{x+2(y-p)}{x}=0$$

Eliminando los valores nulos de *x*, *y* o *z*, la solución del sistema es únicamente el par $M=(x,y)=\left(\frac{p}{2},\frac{3p}{4}\right)$.

Para comprobar si se trata de un máximo tenemos que hallar la matriz de la diferencial segunda en ese punto y ver si es definida negativa (para el máximo). Los cálculos oportunos dan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=-\frac{2p(y-p)^2}{x^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy}(x,y)=\frac{x^2+2p(y-p)}{x^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{2(x-p)}{x}$$

Al particularizar estas derivadas parciales en el punto M se obtiene la matriz de la diferencial segunda: $\begin{pmatrix}-1 & -1\\ -1 & -2\end{pmatrix}$.

Su polinomio característico es $q(t)=t^2+3t+1$, cuyos valores propios son negativos y por tanto, el punto crítico *M* es un máximo relativo de la función, que es lo que estábamos buscando.

El valor de ese máximo es $\frac{p^2}{16}$ y el del volumen $\frac{\pi}{12}\cdot p^3$. En resumen, el máximo volumen lo engendra el triángulo que gira alrededor del lado *x* de longitud *p*/2, siendo los otros dos lados ambos de longitud 3*p*/4. Salvo semejanzas, el triángulo que engendra un volumen mayor es el de lados 2, 3 y 3 al girar alrededor del lado menor.■