

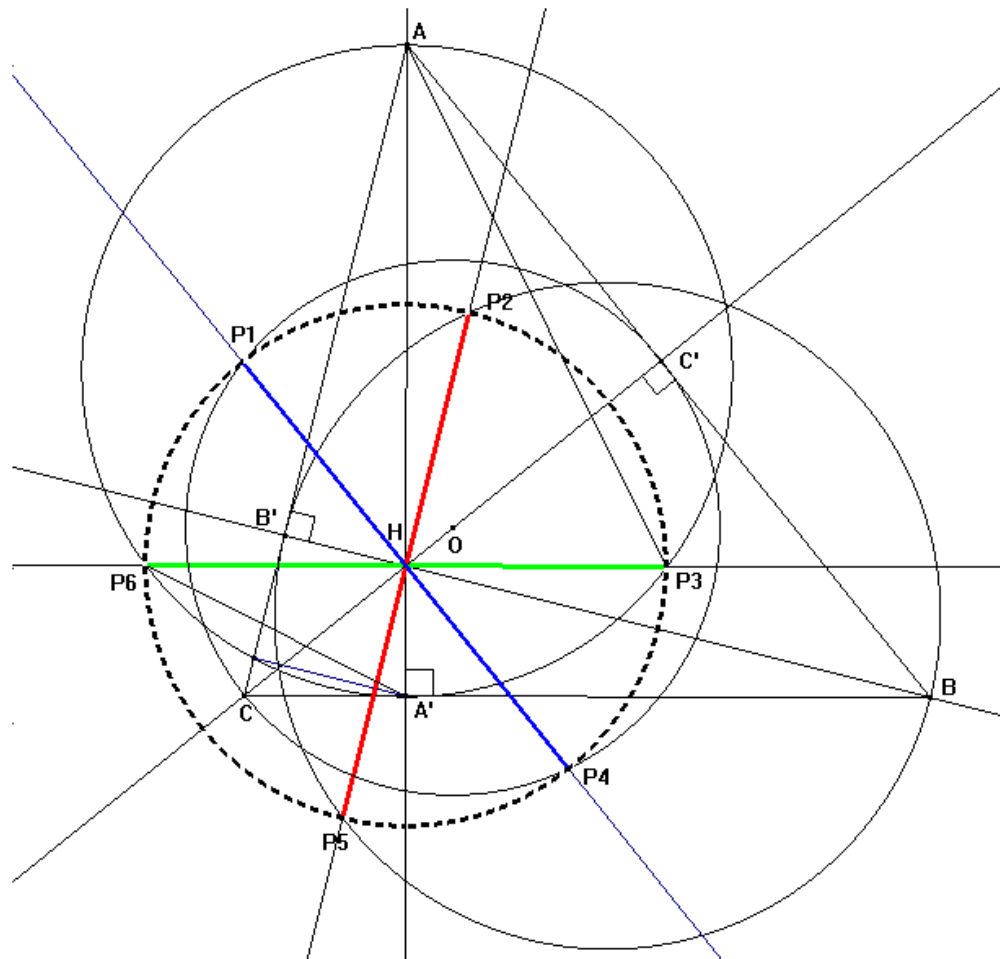
Problema 530

B.4186. Sea ABC un triángulo acutángulo. Se trazan tres circunferencias de diámetros las alturas. En cada una de ellas se traza la cuerda perpendicular por el ortocentro a la altura correspondiente. Demostrar que las tres cuerdas obtenidas tienen la misma longitud.

Komal (2009). Mayo

<http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=200905&t=mat&l=en>

Una representación posible del problema, en donde:



- AA' , BB' y CC' son alturas.
- H ortocentro.
- O centro de la circunferencia de diámetro CC' .
- P_1P_4 , P_2P_5 , P_3P_6 cuerdas obtenidas.

En la circunferencia de diámetro CC' tenemos que P_1H es la media geométrica de los segmentos HC y HC' , es decir, $P_1H^2 = HC \cdot HC'$. Un análisis similar permite establecer que: $P_2H^2 = HB \cdot HB'$ y $P_3H^2 = HA \cdot HA'$, considerando las circunferencia de diámetro BB' y AA' respectivamente.

Por otra parte, por ser los triángulos AHC' y CHA' semejantes ($\angle AC'H = \angle CA'H = 90^\circ$ y $\angle AHC' = \angle CHA'$ por ser opuestos por el vértice), se tiene: $HC \cdot HC' = HA \cdot HA'$ y como los triángulos AHB' y BHA' también son semejantes ($\angle AB'H = \angle BA'H = 90^\circ$ y $\angle AHB' = \angle BHA'$ por ser opuestos por el vértice), podemos deducir $HA \cdot HA' = HB \cdot HB'$

Hasta el momento se puede inferir:

$$HA \cdot HA' = HB \cdot HB' = HC \cdot HC'$$

$$P_3H^2 = P_2H^2 = P_1H^2$$

$$P_3H = P_2H = P_1H \quad (*)$$

Faltaría demostrar, por ejemplo, que: $2 \cdot P_1H = P_1P_4$

Demostración:

En la circunferencia de diámetro CC' y centro O los segmentos OP_1 y OP_4 son radios, el segmento OH es común a los triángulos rectángulos OHP_1 y OHP_4 , de donde los catetos P_1H y HP_4 resultan congruentes por el teorema de Pitágoras, entonces $2 \cdot P_1H = P_1P_4$.

De igual forma puede demostrarse que: $2 \cdot P_2H = P_2P_5$ y $2 \cdot P_3H = P_3P_6$

Por último,

$$(*) \quad P_3H = P_2H = P_1H$$

$$2 \cdot P_3H = 2 \cdot P_2H = 2 \cdot P_1H$$

$$P_3P_6 = P_2P_5 = P_1P_4 \quad (\text{LQQD})$$