Problema 530

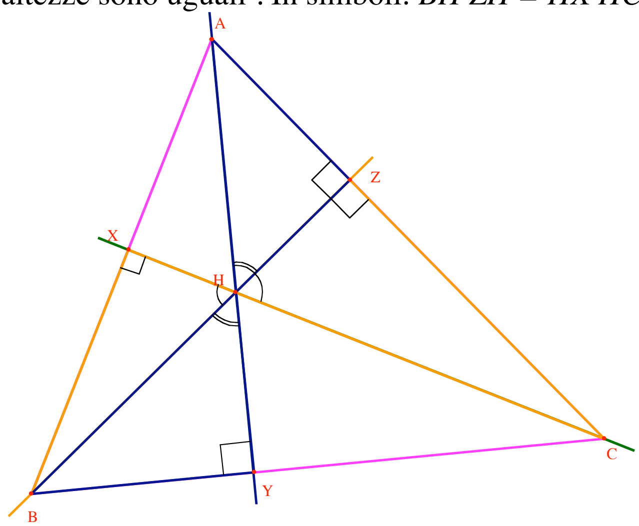
B.4186. Sea ABC un triángulo isósceles. Se trazan tres circunferencias de diámetros las alturas. En cada una de ellas se traza la cuerda perpendicular por el ortocentro a la altura correspondiente. Demostrar que las tres cuerdas obtenidas tienen la misma longitud.

Komal (2009). Mayo

http://www.komal.hu/verseny/feladat.cgi?a=honap&h=200905&t=mat&l=en

Elaborazione di Gennaro Rispoli

Dato il triangolo *ABC*, intersecando le altezze *AY, BZ* e *CX* individuiamo l'ortocentro *H*. Mostriamo *in primis* che i tre prodotti dei segmenti in cui l'ortocentro *H* divide le altezze sono uguali[1]. In simboli: *BH ZH = HX HC = AH HY*.



Dimostrazione

Dalla similitudine dei triangoli *BHX e CZH*, abbiamo:

BH : HC = HX : ZH = XB : CZ. Donde, *BH ZH = HX HC*.

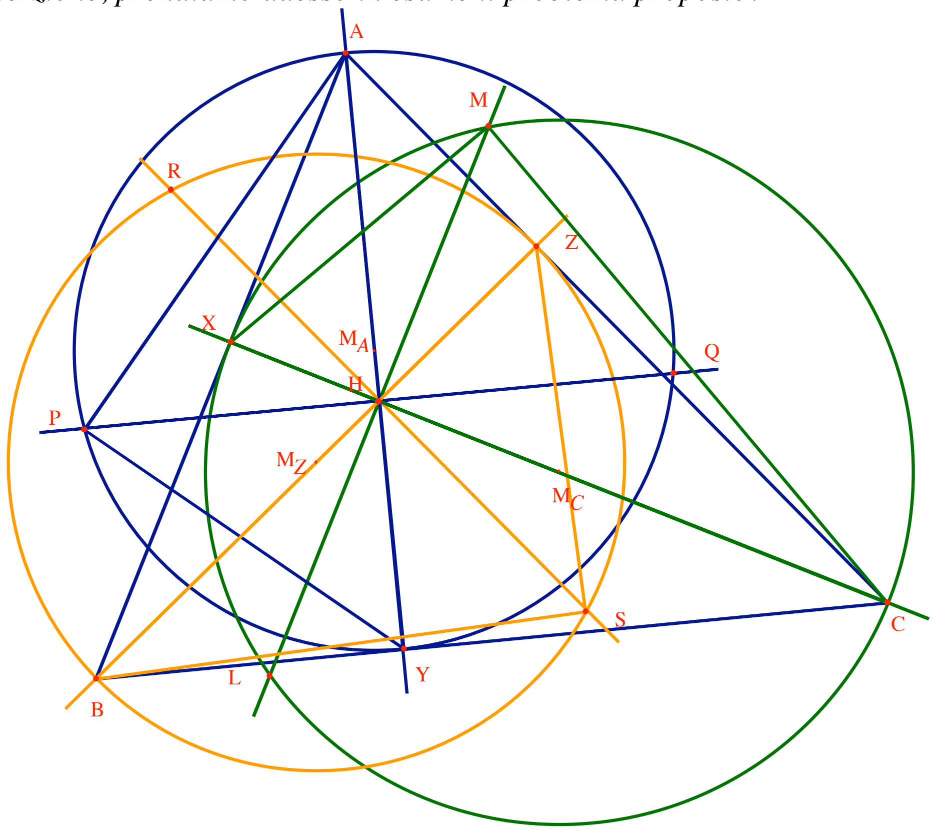
Dalla similitudine dei triangoli *BYH e HZA*, abbiamo:

BH : AH = BY : AZ = HY : HZ. Donde, *BH ZH = AH HY*.

Nel complesso, allora abbiamo *BH ZH = HX HC = AH HY*.

[1] *Altshiller-Court, N., An Introduction to the Modern Geometry of the triangle and the Circle*, Dover 2007, New York (Chapter III, *Properties of the triangle*, pag. 94)

Con tale asserzione, prendiamo adesso in esame il problema proposto.



Con riferimento alla circonferenza di diametro AY di centro M_A, sia PQ la corda per l'ortocentro H perpendicolare ad AY. Vediamo che il triangolo PYA è rettangolo nel vertice P essendo inscritto nella semicirconferenza di diametro AY. A norma del *II teorema di Euclide* abbiamo allora $PH^2 = AH\ HY$. Così essendo la corda PQ pari a 2 PH, possiamo scrivere:

$$PQ = 2 \sqrt{AH\ HY}.$$

Con riferimento alla circonferenza di diametro BZ di centro M_Z, sia RS la corda per l'ortocentro H perpendicolare ad BZ. Vediamo che il triangolo BSZ è rettangolo nel vertice S essendo inscritto nella semicirconferenza di diametro BZ. A norma del *II teorema di Euclide* abbiamo allora $SH^2 = BH\ HZ$. Così essendo la corda RS pari a 2 SH, possiamo scrivere:

$$RS = 2 \sqrt{BH\ HZ}.$$

Con riferimento alla circonferenza di diametro CX di centro M_C, sia LM la corda per l'ortocentro H perpendicolare ad CX. Vediamo che il triangolo MCX è rettangolo nel vertice M essendo inscritto nella semicirconferenza di diametro CX. A norma del *II teorema di Euclide* abbiamo allora $MH^2 = XH \ HC$. Così essendo la corda LM pari a 2 MH, possiamo scrivere:

$$LM = 2 \sqrt{XH\,HC}.$$

Avendo provato inizialmente che i tre prodotti dei segmenti in cui l'ortocentro H divide le altezze sono uguali, abbiamo $PQ = RS = LM$.