

Problema 531

La circumferència circumscrita a un triangle bisecta el segment que uneix l' incentre amb qualssevol dels exincentres del triangle.

Solució de Ricard Peiró:

Considerem la circumferència circumscrita al triangle

$\triangle ABC$.

Siga I l' incentre del triangle $\triangle ABC$ i I_a l' exincente.

La bisectriu interior al vèrtex A talla la circumferència circumscrita al triangle en el punt D .

Vegem que el triangle IBD és isòsceles.

$\angle IBD$ és un angle inscrit en la circumferència, l' angle mesura la meitat de l' arc que abraça, aleshores,

$$\angle IBD = \frac{A+B}{2}.$$

$\angle ADB$ és un angle inscrit en la circumferència, aleshores,

$$\angle IDB = \angle ADB = C.$$

$$\angle DIB = 180^\circ - (\angle IBD + \angle IDB) = 180^\circ - \left(\frac{A+B}{2} + C \right) = 180^\circ - \left(\frac{A+B}{2} + 180^\circ - (A+B) \right) = \frac{A+B}{2}$$

Aleshores, $\overline{ID} = \overline{BD}$.

Vegem que el triangle I_aBD és isòsceles.

$$\angle DBI_a = 90^\circ - \angle IBD = 90^\circ - \frac{A+B}{2} = \frac{C}{2}.$$

$$\angle BDI_a = 180^\circ - \angle ADB = 180^\circ - C.$$

$$\angle DI_aB = 180^\circ - (\angle DBI_a + \angle BDI_a) = 180^\circ - \left(\frac{C}{2} + 180^\circ - C \right) = \frac{C}{2}.$$

Aleshores, $\overline{I_aD} = \overline{BD}$.

Per tant, $\overline{ID} = \overline{I_aD}$, aleshores D bisecta el segment $\overline{II_a}$.

Anàlogament amb els altres exincentres, la circumferència circumscrita bisectaria els segments que determinen l' incentre i l' exincentre.

