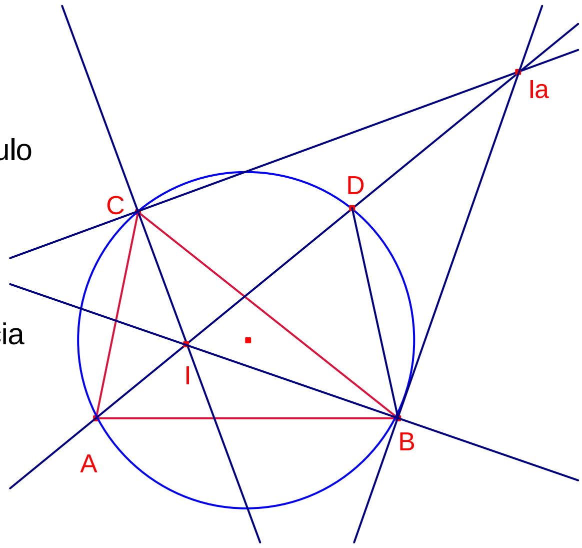
Problema 531

La circunferencia circunscrita a un triángulo biseca al segmento que une el incentro con cualquiera de los excentros de dicho triángulo.

Solución de Ricard Peiró:



Consideremos la circunferencia circunscrita al triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$.

Sea I el incentro del triángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ y I_a el exincentro.
La bisectriz interior del vértice A corta la circunferencia circunscrita al triángulo en el punto D.

Veamos que el triángulo $\overset{\Delta}{IBD}$ es isósceles.
$\angle IBD$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, el ángulo mide la mitad del arco que abarca, entonces,

$\angle IBD = \frac{A+B}{2}$.

$\angle ADB$ es un ángulo inscrito en la circunferencia, entonces,

$\angle IDB = \angle ADB = C$.

$$\angle DIB = 180^o - (\angle IBD + \angle IDB) = 180^o - \left(\frac{A+B}{2} + C\right) = 180^o - \left(\frac{A+B}{2} + 180^o - (A+B)\right) = \frac{A+B}{2}$$

Entonces, $\overline{ID} = \overline{BD}$.

Veamos que el triángulo $\overset{\Delta}{I_aBD}$ es isósceles.

$$\angle DBI_a = 90^o - \angle IBD = 90^o - \frac{A+B}{2} = \frac{C}{2}.$$

$$\angle BDI_a = 180^o - \angle ADB = 180^o - C.$$

$$\angle DI_aB = 180^o - (\angle DBI_a + \angle BDI_a) = 180^o - \left(\frac{C}{2} + 180^o - C\right) = \frac{C}{2}.$$

Entonces, $\overline{I_aD} = \overline{BD}$.

Por tanto, $\overline{ID} = \overline{I_aD}$, entonces D biseca el segmento $\overline{II_a}$.

Análogamente con los otros exincentros, la circunferencia circunscrita bisecaría los segmentos que determinan el incentro y el exincentro.