Problema 533. Dedicado a Jack Garfunkel.

Sea ABC un triángulo acutángulo de lados a, b y c, p, R, r, semiperímetro, radio del círculo cirunscrito e inscrito, al triángulo, respectivamente, m_a, m_b, m_c las medianas, h_a, h_b, h_c, las alturas correspondientes a los lados a, b y c, respectivamente, probar que :

(i) $p \geq \dfrac{abc}{2R^2}$

(ii) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} \geq \dfrac{\sqrt{3}}{R}$

(iii) $\dfrac{1}{m_a} + \dfrac{1}{m_b} + \dfrac{1}{m_c} \geq \dfrac{2}{R}$

(iv) $\dfrac{a}{m_a} + \dfrac{b}{m_b} + \dfrac{c}{m_c} \geq 2\sqrt{3}$

(v) $h_a m_a + h_b m_b + h_c m_c \leq p^2$

alcanzado la igualdad en todas estas desigualdades si el triángulo ABC es equilátero.

Garfunkel, J.(1967), Exploring Geometric Maxima and Minima, Mathematics Teacher, February, 1969, N.2, pp.85-90

Propuesto por Juan Bosco Romero Márquez, profesor colaborador de la Universidad de Valladolid

Soluzione di Ercole Suppa.

(i) Indicando con Δ l'area del triangolo ABC e tenendo conto della disuguaglianza di Eulero $R \geq 2r$, abbiamo:

$$\frac{abc}{2R^2} = \frac{abc}{2R \cdot \frac{abc}{4\Delta}} = \frac{2\Delta}{R} \leq \frac{\Delta}{r} = p$$

Se ABC è equilatero, come è noto $R = 2r$, e la precedente relazione diventa un'uguaglianza.

(ii) Poichè la funzione $f(x) = \sin x$ è concava sull'intervallo $[0, \pi]$, dalla disuguaglianza di Jensen segue che:

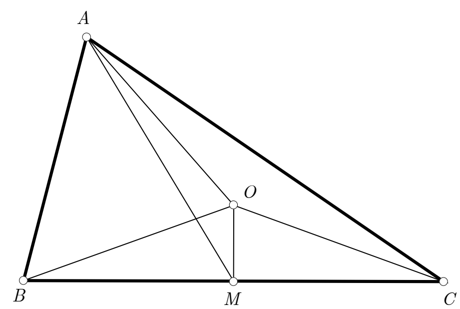
$$\sin A + \sin B + \sin C \leq 3 \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right) = 3 \sin\frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \tag{1}$$

Dalla (1) e dalla disuguaglianza tra la media aritmetica e la media armonica abbiamo:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c} = \frac{9}{2R(\sin A + \sin B + \sin C)} \geq \frac{9}{2R \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{R}$$

Se ABC è equilatero $\sin A + \sin B + \sin C = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $\sum \frac{1}{a} = \frac{9}{\sum a}$, quindi abbiamo un'uguaglianza.

(iii)



Indicando con O il circoncentro e con M il punto medio di BC, dalla disuguguaglianza triangolare abbiamo:

$$AM \leq AO + OM \qquad \Rightarrow \qquad m_a \leq R + R\cos A \tag{2}$$

Sommando la (2) e le disuguaglianze analoghe relative a m_b ed m_c otteniamo:

$$m_a + m_b + m_c \leq 3R + R(\cos A + \cos B + \cos C) \tag{3}$$

Dalla (3), usando la nota identità $\sum \cos A = 1 + \frac{r}{R}$ e la disuguaglianza di Eulero $R \geq 2r$, segue:

$$m_a + m_b + m_c \leq 3R + R + r \leq \frac{9}{2}R \tag{4}$$

Dalla (4) e dalla disuguaglianza tra la media aritmetica e la media armonica abbiamo:

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} \geq \frac{9}{m_a + m_b + m_c} \geq \frac{9}{\frac{9}{2}R} = \frac{2}{R}$$

Se ABC è equilatero $m_a = m_b = m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ ed $R = \frac{2}{3}m_a = \frac{a}{\sqrt{3}}$, quindi

$$\frac{1}{m_a} + \frac{1}{m_b} + \frac{1}{m_c} = 3\frac{2}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\frac{a}{\sqrt{3}}} = \frac{2}{R}$$

(iv) Per dimostrare la disuguaglianza faremo uso delle seguenti relazioni:

$$\frac{2r_b r_c}{r_b + r_c} = \frac{2\frac{\Delta}{p-b}\frac{\Delta}{p-c}}{\frac{\Delta}{p-b} + \frac{\Delta}{p-c}} = \frac{2\Delta}{2p - b - c} = \frac{2\Delta}{a} = h_a \tag{5}$$

$$r_b + r_c = \frac{\Delta}{p-b} + \frac{\Delta}{p-c} = \frac{\Delta}{(p-b)(p-c)} =$$
$$= a\sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)(p-c)}} = 2R \cdot \sin A \cdot \cot \frac{A}{2} = 4R \cdot \cos^2 \frac{A}{2} \tag{6}$$

$$r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a = \frac{\Delta^2}{(p-a)(p-b)} + \frac{\Delta^2}{(p-b)(p-c)} + \frac{\Delta^2}{(p-c)(p-a)} =$$
$$= p(p-c) + p(p-a) + p(p-b) = p^2 \tag{7}$$

$$r_a r_b r_c = \frac{\Delta^3}{(p-a)(p-b)(p-c)} = p\Delta \tag{8}$$

Dalla (2) e la (6) abbiamo:

$$m_a \leq R(1 + \cos A) = 2R\cos^2 \frac{A}{2} = \frac{r_b + r_c}{2} \tag{9}$$

e quindi dalla (5) segue che

$$m_a h_a \leq \frac{r_b + r_c}{2} \cdot h_a = r_b r_c \tag{10}$$

ed analoghe disuguaglianze si ottengono permutando ciclicamente a, b, c.

Tenendo conto della (7) abbiamo:

$$(r_a + r_b + r_c)^2 \geq 3(r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a) = 3p^2 \qquad \Rightarrow$$
$$r_a + r_b + r_c \geq \sqrt{3}p \tag{11}$$

Possiamo ora dimostrare la disuguaglianza (iv) utilizzando (8), (10), (11) :

$$\sum \frac{a}{m_a} = \sum \frac{2\Delta}{h_a m_a} \geq 2\Delta \sum \frac{1}{r_b r_c} =$$
$$= 2\Delta \frac{r_a + r_b + r_c}{r_a r_b r_c} \geq 2\Delta \frac{\sqrt{3}p}{p\Delta} = 2\sqrt{3}$$

Se ABC è equilatero $m_a = m_b = m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, quindi:

$$\sum \frac{a}{m_a} = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$$

(v) Dalle relazioni (7) e (10) segue che:

$$h_a m_a + h_b m_b + h_c m_c \leq r_b r_c + r_c r_a + r_a r_b = p^2$$

Se ABC è equilatero $h_a = h_b = h_c = m_a = m_b = m_c = \frac{\sqrt{3}}{2}a$, $p = \frac{3}{2}a$, pertanto:

$$h_a m_a + h_b m_b + h_c m_c = 3 \cdot \frac{3}{4}a^2 = \frac{9}{4}a^2 = p^2$$

$\square$