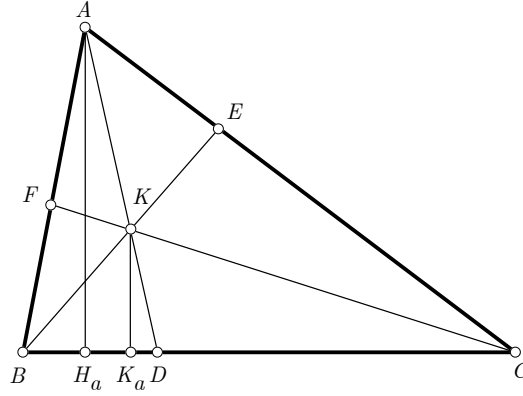


Problema 534. Sea ABC un triángulo y K su simediano, conocido también por punto de Lemoine-Grebe del mismo. Si $\Lambda(K)$ denota la suma de las distancias del punto simediano a los lados del triángulo, demostrar que $\Lambda(K) \leq 3r$, donde r es el radio de la circunferencia inscrita al mismo.

NOTA. Este problema pretende continuar y profundizar con la línea relativa a los problemas 420 y 506 que propuso el mismo proponente en esta revista.

Propuesto por Vicente Vicario García, I.E.S. El Sur, Huelva

Soluzione di Ercole Suppa. Siano D, E, F le tracce delle simmediane AK, BK, CK sui lati BC, CA, AB rispettivamente, come indicato in figura.



E' noto¹ che la simmediana uscente da un vertice divide il lato opposto in parti proporzionali ai quadrati dei lati dell'angolo. Pertanto:

$$\frac{AF}{FB} = \frac{b^2}{a^2} \quad , \quad \frac{AE}{EC} = \frac{c^2}{a^2} \quad (1)$$

Dal teorema di Van Aubel², tenendo conto delle formule (1), discende che:

$$\frac{AK}{KD} = \frac{AF}{FB} + \frac{AE}{EC} = \frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{b^2 + c^2}{a^2} \quad (2)$$

Indicati con H_a e K_a i piedi delle perpendicolari condotte rispettivamente da A e K sul lato BC , dato che i triangoli AH_aD e KK_aD sono simili, abbiamo:

$$\frac{AH_a}{KK_a} = \frac{AD}{KD} = \frac{AK + KD}{KD} = \frac{AK}{KD} + 1 = \frac{b^2 + c^2}{a^2} + 1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2} \quad (3)$$

Pertanto, indicata con Δ l'area del triangolo ABC , abbiamo:

$$KK_a = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot AH_a = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot \frac{2\Delta}{a} = \frac{2a\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (4)$$

¹Vedere la soluzione del Problema 521

²Vedere la soluzione del Problema 513

Usando la (4) e le analoghe relazioni per le distanze di K da AC e AB otteniamo:

$$\Lambda(K) = \frac{\Delta(2a + 2b + 2c)}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{4s\Delta}{a^2 + b^2 + c^2} \quad (5)$$

dove con s abbiamo indicato il semiperimetro di ABC .

Dalla (5), tenendo conto della relazione $\Delta = rs$ e della nota disuguaglianza

$$(a + b + c)^2 \leq 3(a^2 + b^2 + c^2)$$

segue che:

$$\Lambda(K) = \frac{4s^2r}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(a + b + c)^2}{a^2 + b^2 + c^2} \cdot r \leq 3r$$

e la dimostrazione è completa. $\square$