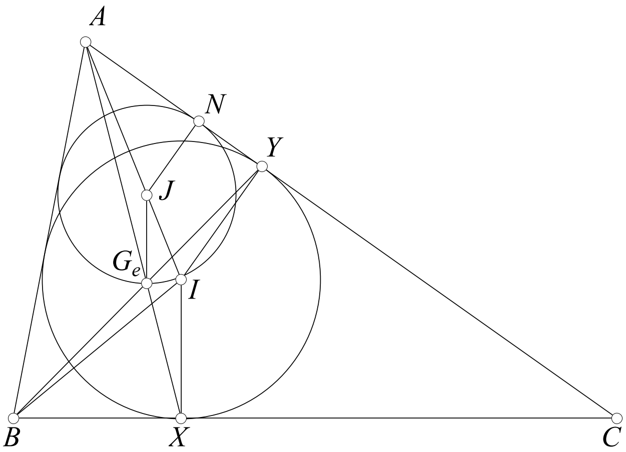
Problema 536 de *triánguloscabri*. *Construir las tres circunferencias que pasando por el punto de Gergonne son tangentes a dos de los lados del triángulo ABC. Los seis puntos de tangencia son concíclicos.*

Yiu, P.: Introduction to the Geometry of the Triangle, pág. 6.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Consideremos la siguiente figura, en la que hemos trazado la circunferencia inscrita, sus puntos de contacto X, Y con los lados BC, CA, respectivamente.



Las cevianas AX y BY se cortan en el punto de Gergonne G_e, y la circunferencia tangente a AB y AC que pasa por G_e tiene su centro J en la bisectriz interior del ángulo A y en la paralela a IX por G_e. Entonces, llamando N a la proyección de J sobre la recta CA, tendremos

$$\frac{AN}{AY} = \frac{AJ}{AI} = \frac{AG_e}{AX} = \frac{v+w}{u+v+w},$$

siendo $(u : v : w)$ las coordenadas baricéntricas del punto de Gergonne. Teniendo en cuenta las fórmulas del área $\Delta = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c)$, es $G_e = \left(\frac{1}{s-a} : \frac{1}{s-b} : \frac{1}{s-c}\right) = (r_a : r_b : r_c)$, y por tanto

$$\begin{aligned} NY =& AY - AN = AY \cdot \left(1 - \frac{AN}{AY}\right) = (s-a) \cdot \left(1 - \frac{AN}{AY}\right) \\ =& (s-a) \cdot \left(1 - \frac{r_b + r_c}{r_a + r_b + r_c}\right) = \frac{(s-a)r_a}{r_a + r_b + r_c} = \frac{\Delta}{r_a + r_b + r_c}, \end{aligned}$$

que es simétrico respecto de a, b, c, y también lo será la distancia IN. Por tanto, los seis puntos de contacto están sobre una circunferencia de centro I.