En un triángulo rectángulo $\widehat{ABC}$ con $\hat{A} = 60°$ y $\hat{B} = 30°$, sean D, E y F los puntos de trisección cercanos a A, B y C sobre os lados AB, BC y CA, respectivamente. Extendemos CD, AE yBF hasta intersecar a la circunferencia circunscrita en P, Q y R. Demostrar que $\widehat{PQR}$ es un triángulo equilátero.

SOLUCIÓN:

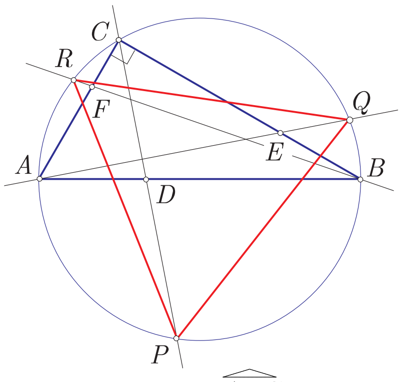
Este ejercicio expone una solución del Problema propuesto en el Laboratorio virtual de triángulos con Cabri (TriangulosCabri), con el número **537**.

http://www.personal.us.es/rbarroso/trianguloscabri/index.htm

Con el siguiente enunciado:

> *En un triángulo rectángulo ABC con < A = 60º y B = 30º, sean D,E,F los puntos de trisección cercanos a A, B y C sobre los lados AB, BC y CA, respectivamente. Extendemos CD, AE y BF hasta intersecar a la circunferencia circunscrita en P, Q y R. Demostrar que PQR es un triángulo equilátero.*
>
> *Garfunkel, J. Pi Mu Epsilon Journal 331 (26)*

—— - ——



Mostremos que las coordenadas baricéntricas respecto a $\widehat{ABC}$ sus útiles para resolver este problema.
El punto D que divide al segmento AB en la razón $1:2$ tiene coordenadas baricéntrias $D(2:1:0)$.
La recta CD y la circunferencia circunscritas tiene por ecuaciones:

$$x - 2y = 0, \qquad a^2yz + b^2zx + c^2xy = 0.$$

Ambas se vuelven a cortar en el punto

$$P\left(2(a^2+2b^2) : a^2+2b^2 : -2c^2\right).$$

Procediendo cíclicamente, se obtiene:

$$Q\left(-2a^2 : 2(b^2+2c^2) : b^2+2c^2\right), \qquad R\left(c^2+2a^2 : -2b^2 : 2(c^2+2a^2)\right).$$

Por las condiciones impuestas a $\widehat{ABC}$, se verifica que $a^2 = 3b^2$ y $c = 2b$. por lo que:

$$P(10:5:-8), \qquad Q(-2:6:3), \qquad R(5:-1:10).$$

La longitud [(1)] de cada uno de los tres lados de $\widehat{PQR}$ es $\sqrt{3}b$, por lo que es equilátero. Se tiene, además, que:

$$\text{área } \widehat{PQR} = \frac{3}{2} \text{ área } \widehat{ABC}.$$

http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/ejrb2408.pdf

---

(1) Paul Yiu.- Introduction to the Geometry of the Triangle, §7.1, pág. 89. (http://www.math.fau.edu/yiu/GeometryNotes020402.ps).
Angel Montesdeoca.- Geometría métrica y proyectiva en el plano con coordenadas baricéntricas, §11.3, pág. 29. (http://webpages.ull.es/users/amontes/pdf/geoba.pdf).
Si $P_i(x_i : y_i : z_1)$, $i = 1, 2$ están dados en coordenadas baricéntricas homogéneas, la distancia entre P_1 y P_2 está dada por el módulo del vector $\overrightarrow{P_1P_2}$:

$$\begin{aligned} P_1P_2^2 \;=\; & \frac{1}{(x_1+y_1+z_1)^2(x_2+y_2+z_2)^2}\Big(S_A\big((y_2+z_2)x_1 - x_2(y_1+z_1)\big)^2 + \\ & + S_B\big((z_2+x_2)y_1 - y_2(z_1+x_1)\big)^2 + S_C\big((x_2+y_2)z_1 - z_2(x_1+y_1)\big)^2\Big). \end{aligned}$$