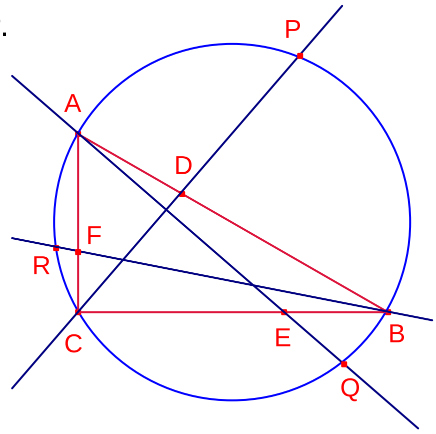
Problema 537

Siga el triangle rectangle $\overset{\Delta}{ABC}$, $A = 60^o$, $B = 30^o$.

Siguen D, E, F els punts de la trisecció més propers a A, B y C sobre els costats $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{CA}$, respectivament.

Les rectes CD, AE, i BF intersecten la circumferència circumscrita al triangle en P, Q, R, respectivament. Demostreu que el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter.



Solució Ricard Peiró i Estruch:

Siga $\overline{AB} = c$ hipotenusa del triangle. Aleshores:

$\overline{CA} = \frac{c}{2}$, $\overline{BC} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. $\overline{AD} = \frac{c}{3}$, $\overline{CF} = \frac{c}{6}$, $\overline{CE} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Siga $\alpha = \angle ACD$. $\beta = \angle CEA$.

Aplicant el teorema dels sinus al triangle $\overset{\Delta}{ACD}$:

$\frac{a}{3\cdot\sin\alpha} = \frac{a}{2\cdot\sin(60^o+\alpha)}$.

$3\cdot\sin\alpha = 2\cdot\sin(60^o+\alpha)$.

$3\cdot\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha$.

$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Aleshores, $\alpha = \beta$.

$\alpha = \angle CEA = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{QB}}{2} = \frac{60^o + \overset{\frown}{QB}}{2}$.

Aleshores, $\overset{\frown}{QB} = 2\alpha - 60^o$.

Per tant, $\angle BCQ = \alpha - 30^o$.

$\angle PCB = \angle ACB - \angle ACD = 90^o - \alpha$.

$\angle PCQ = \angle PCB + \angle BCQ = 90^o - \alpha + \alpha - 30^o = 60^o$.

Aleshores, $\angle PRQ = 60^o$.

Siga $\gamma = \angle FBC$. $\delta = \angle BCQ$.

$\mathrm{tg}\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{c}{6}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}$, $\mathrm{tg}\delta = \mathrm{tg}\frac{\overset{\frown}{QB}}{2} = \mathrm{tg}(\alpha - 30^o) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}30^o}{1 + \mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}30^o} = \frac{\sqrt{3}}{9}$.

Aleshores, $\gamma = \delta = \alpha - 30^o$.

Aleshores, $\overset{\frown}{RQ} = \overset{\frown}{BC} = 120^o$.

Aleshores, $\angle RPQ = 60^o$.

Per tant, $\angle PQR = 60^o$. Aleshores el triangle $\overset{\Delta}{PQR}$ és equilàter.