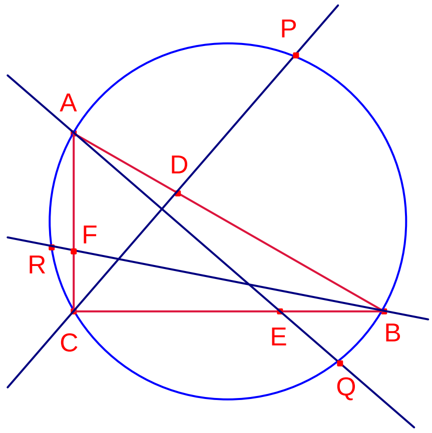
Problema 537

En un triángulo rectángulo $\overset{\Delta}{ABC}$ con $A = 60^o$ y $B = 30^o$, sean D, E, F los puntos de trisección cercanos a A, B y C sobre los lados AB, BC y CA, respectivamente. Extendemos CD, AE y BF hasta intersecar a la circunferencia circunscrita en P, Q y R. Demostrar que PQR es un triángulo equilátero.

Garfunkel, J. Pi Mu Epsilon Journal 331 (26)



Solución Ricard Peiró i Estruch:

Sea $c = \overline{AB}$ hipotenusa del triángulo. Entonces:

$\overline{CA} = \frac{c}{2}$, $\overline{BC} = \frac{c\sqrt{3}}{2}$. $\overline{AD} = \frac{c}{3}$, $\overline{CF} = \frac{c}{6}$, $\overline{CE} = \frac{c\sqrt{3}}{3}$.

Sea $\alpha = \angle ACD$. $\beta = \angle CEA$.

Aplicando el teorema de los senos al triángulo $\overset{\Delta}{ACD}$:

$$\frac{a}{3\cdot\sin\alpha} = \frac{a}{2\cdot\sin(60^o+\alpha)}.$$

$$3\cdot\sin\alpha = 2\cdot\sin(60^o+\alpha).$$

$$3\cdot\sin\alpha = \sqrt{3}\cos\alpha + \sin\alpha.$$

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\mathrm{tg}\beta = \frac{\overline{CA}}{\overline{CE}} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c\sqrt{3}}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Entonces, $\alpha = \beta$.

$$\alpha = \angle CEA = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{QB}}{2} = \frac{60^o + \overset{\frown}{QB}}{2}.$$

Entonces, $\overset{\frown}{QB} = 2\alpha - 60^o$.

Por tanto, $\angle BCQ = \alpha - 30^o$.

$\angle PCB = \angle ACB - \angle ACD = 90^o - \alpha$.

$\angle PCQ = \angle PCB + \angle BCQ = 90^o - \alpha + \alpha - 30^o = 60^o$.

Entonces, $\angle PRQ = 60^o$.

Sea $\gamma = \angle FBC$. $\delta = \angle BCQ$.

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{\overline{CF}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{c}{6}}{\frac{c\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{9}, \quad \mathrm{tg}\delta = \mathrm{tg}\frac{\overset{\frown}{QB}}{2} = \mathrm{tg}(\alpha - 30^o) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}30^o}{1+\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}30^o} = \frac{\sqrt{3}}{9}.$$

Entonces, $\gamma = \delta = \alpha - 30^o$.

Entonces, $\overset{\frown}{RQ} = \overset{\frown}{BC} = 120^o$.

Entonces, $\angle RPQ = 60^o$.

Por tanto, $\angle PQR = 60^o$. Entonces el triángulo $\overset{\Delta}{PQR}$ es equilátero.