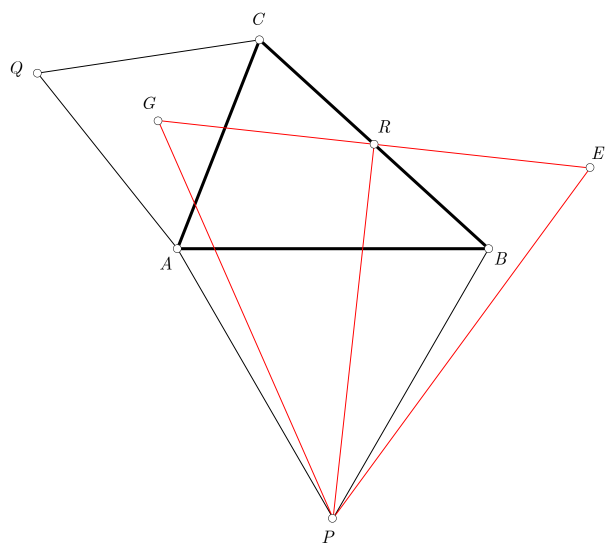
Problema 538. (Homenaje a Jack Garfunkel)

Dado un triángulo ABC se trazan equiláteros exteriores BAP y ACQ sobre los lados AB y CA. Sea R el punto medio de BC y G el baricentro de ACQ. Demostrar que el triángulo PRG es $30° - 90° - 60°$.

Garfunkel, J. Pi Mu Epsilon, 44, 553

Soluzione di Ercole Suppa.

Detto E il simmetrico di G rispetto ad R, per provare la proprietà richiesta è sufficiente dimostrare che $\triangle PEG$ è un triangolo equilatero.



Utilizziamo il piano complesso con origine nel punto A ed denotiamo con lettere minuscole le coordinate complesse dei punti indicati con corrispondenti lettere maiuscole, per cui: $A(0)$, $B(b)$, $C(c)$, $P(p)$, $Q(q)$, $G(g)$, $R(r)$, $E(e)$ dove:

$$p = b \cdot e^{-\frac{\pi}{3}i} = b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right), \qquad q = c \cdot e^{\frac{\pi}{3}i} = c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) \tag{1}$$

$$g = \frac{0 + c + q}{3} = c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right), \qquad r = \frac{b+c}{2} \tag{2}$$

$$e = 2r - g = b + c - c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) = b + c\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) \tag{3}$$

Utilizzando (1), (2), (3) possiamo calcolare le lunghezze dei lati di $\triangle PGE$ nel modo seguente:

$$
\begin{aligned}
PG = |p-g| &= \left| b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\right| = \\
&= \left| \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}ci\right)\right| = \left| b - \frac{\sqrt{3}}{3}ci \right|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
PE = |p-e| &= \left| b\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - b - c\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\right| = \\
&= \left| b\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) - c\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\right| = \\
&= \left| \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(b - \frac{\sqrt{3}}{3}ci\right)\right| = \left| b - \frac{\sqrt{3}}{3}ci \right|
\end{aligned}
$$

$$
EG = |e-g| = \left| b + c\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}i\right) - c\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}i\right)\right| = \left| b - \frac{\sqrt{3}}{3}ci \right|
$$

Dato che $PG = PE = EG$ il triangolo $\triangle PEG$ risulta equilatero e la dimostrazione è completa. $\square$