Problema 539 de *triánguloscabri*. *Sea el triángulo ABC con ortocentro H y P un punto de su circunferencia circunscrita, distinto de A, B y C. Sea E el pie de la altura BH, sean $PAQB$ y $PARC$ paralelogramos, y sea X el punto de corte de AQ y HR. Demostrar que EX es paralela a AP.*

Djukic, Jankovic, Matic, Petrovic (2004): The IMO Compendium. A collection of problems suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Springer, pág 288.

Propuesto por Gennaro Rispoli.

Solución de Francisco Javier García Capitán.

Usaremos los números complejos para resolver el problema. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que el triángulo ABC está inscrito en la circunferencia unidad y representaremos con letras mayúsculas a los puntos del plano y, con las correspondientes letras minúsculas a los afijos de estos puntos. Así, a, b, c son los afijos de A, B y C, respectivamente, el circuncentro el origen, y el baricentro es $g = \frac{1}{3}(a + b + c)$. Teniendo en cuenta la relación de Euler, $HG : GO = 2 : 1$, o bien $OH = 3 \cdot OG$, el afijo del ortocentro es $h = a + b + c$.

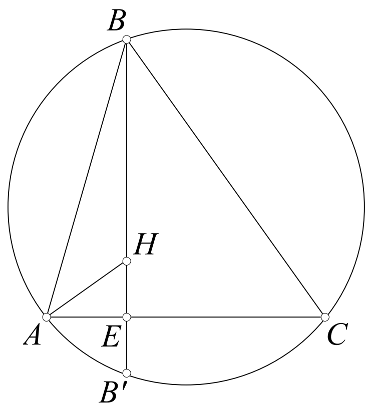

Figura 1

Sabemos que si la altura BH corta en de nuevo B' a la circunferencia circunscrita, B' y H son puntos simétricos respecto de la recta CA. Por tanto tendremos $e = \frac{1}{2}(h + b')$.

Lema 1. *$bb' = -ac$.*

Demostración. Teniendo en cuenta que BB' y AC son perpendiculares, el número complejo $(b'-b)/(c-a)$ debe ser imaginario puro. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
&\frac{b'-b}{c-a} = -\frac{\bar{b}'-\bar{b}}{\bar{c}-\bar{a}} = -\frac{\frac{1}{b'}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{c}-\frac{1}{a}} = -\frac{\frac{b-b'}{bb'}}{\frac{a-c}{ac}} = -\frac{b'-b}{c-a}\cdot\frac{ac}{bb'} \\
\Rightarrow &\frac{b'-b}{c-a}\left(1+\frac{ac}{bb'}\right) = 0 \Rightarrow bb' = -ac.
\end{aligned}$$

En consecuencia obtenemos

$$e = \frac{h+b'}{2} = \frac{1}{2}\left(a+b+c-\frac{ac}{b}\right). \tag{1}$$

Si ahora P es un punto sobre la circunferencia circunscrita (Figura 2) y obtenemos Q y R como dice el enunciado, tendremos que A es el ortocentro del triángulo HQR. En efecto, el triángulo AQR es una traslación con vector PA del triángulo PBC.

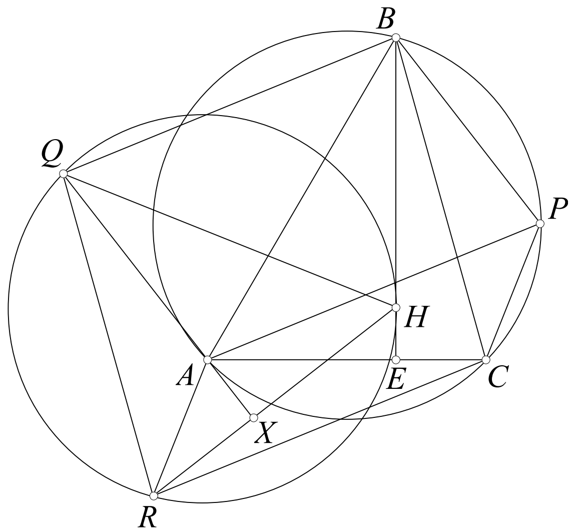

Figura 2

Entonces, AH, que es perpendicular a BC también lo es a QR. Además tenemos

$$\begin{aligned}
q &= b+a-p, \\
r &= c+a-p,
\end{aligned}$$

de donde, por ejemplo,

$$\begin{aligned}h-q=&(a+b+c)-(b+a-p)=c+p,\\ r-a=&c-p,\end{aligned}$$

y, siendo c y p números complejos de módulo 1, AR es perpendicular a HQ.

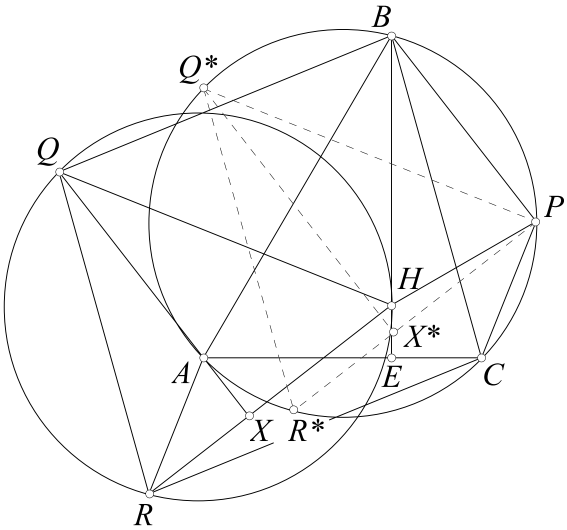

Figura 3

Si ahora hacemos una traslación con vector HP del triángulo HQR obtenemos el triángulo PQ^*R^* (Figura 3) siendo

$$\begin{aligned}q^*&=q+p-h=(b+a-p)+p-(a+b+c)=-c,\\ r^*&=r+p-h=(c+a-p)+p-(a+b+c)=-b.\end{aligned}$$

Como el triángulo AQ^*R^* está sobre la circunferencia unidad, podemos aplicarle el Lema 1, obteniendo que

$$x^*=\frac{1}{2}\left(p-b-c-\frac{pb}{c}\right),$$

Trasladando el punto X^* con vector PH obtenemos el punto X con afijo

$$\begin{aligned}x=&x^*+h-p\\ \Rightarrow 2x=&2x^*+2h-2p=\left(p-b-c-\frac{pb}{c}\right)+2a+2b+2c-2p\\ =&2a+b+c-p-\frac{pb}{c}.\end{aligned}$$

Ahora, restando de (1),

$$
\begin{aligned}
2x - 2e =& \left(2a + b + c - p - \frac{pb}{c}\right) - \left(a + b + c - \frac{ac}{b}\right) \\
=& a - p + \frac{ac}{b} - \frac{pb}{c}.
\end{aligned}
$$

Para demostrar que EX es paralelo a AP bastará comprobar que

$$
\frac{a - p + \frac{ac}{b} - \frac{pb}{c}}{a - p} = 1 + \frac{ac^2 - pb^2}{bc(a - p)}
$$

es un número real, lo cual se deduce de que

$$
\frac{\bar{a} \cdot \bar{c}^2 - \bar{p} \cdot \bar{b}^2}{\bar{b}\bar{c}(\bar{a} - \bar{p})} = \frac{\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{c^2} - \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{b^2}}{\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{p}\right)} = \frac{pb^2 - ac^2}{bc(p - a)} = \frac{ac^2 - pb^2}{bc(a - p)}.
$$

Referencia:

Liang-shin Hahn. *Complex Numbers and Geometry*. MAA, 1994.