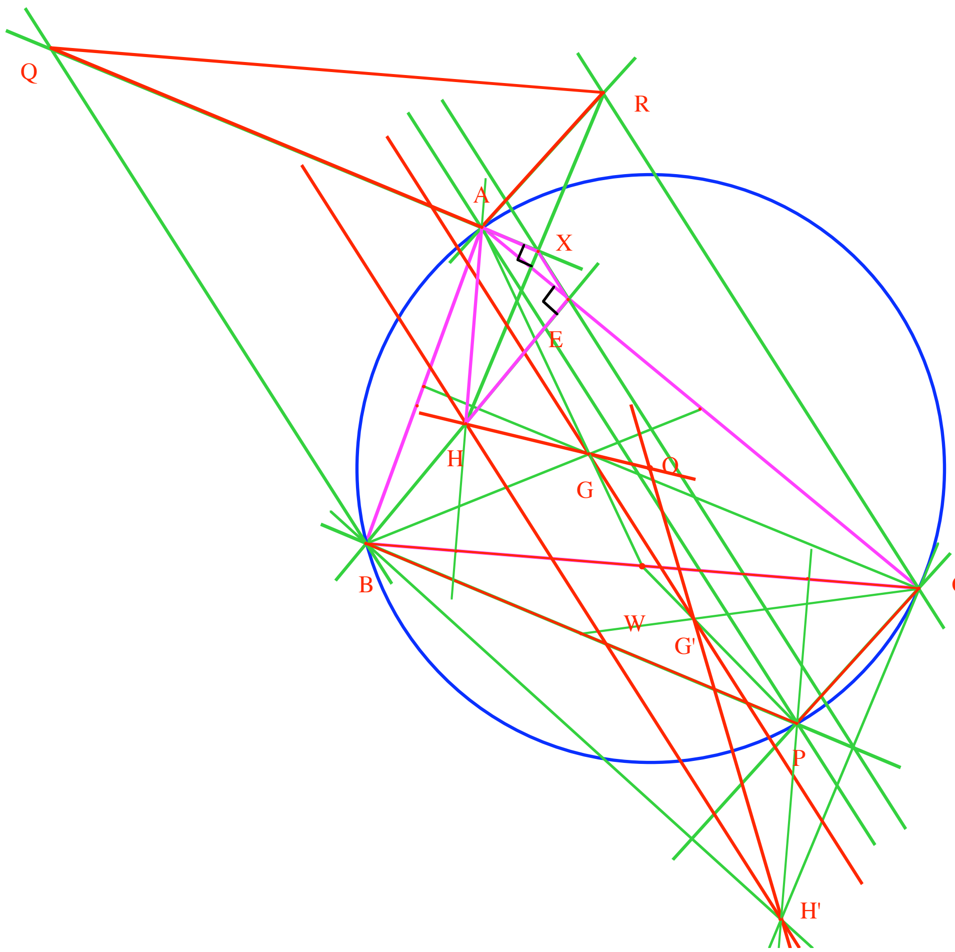
***Problema* 539**

GI(GBR) IMO 1996

Sea el triángulo ABC con ortocentro H y P un punto de su circunferencia circunscrita, distinto de A, B y C. Sea E el pie de la altura BH, sean PAQB y PARC paralelogramos, y sea X el punto de corte de AQ y HR. Demostrar que EX es paralela a AP.

Djukic D., Jankovic V., Matic I. Petrovic N.

The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olympiads: 1959-2004, Springer, 2006 *(pag 288)*



Riflessioni di *Gennaro Rispoli*

Del triangolo dato ABC consideriamo il baricentro G oltre al circocentro O e l'ortocentro H. Del triangolo BPC inscritto nella circonferenza circoscritta ad ABC consideriamo oltre al circocentro O il baricentro G' e l'ortocentro H'.

Con riferimento al triangolo ABC, abbiamo che i punti H, G ed O sono allineati sulla corrispondente retta di Eulero e HG =2 GO. Con riferimento al triangolo PBC, abbiamo che i punti H', G' ed O sono allineati sulla corrispondente retta di Eulero e H'G' = 2 G'O.

Con tali relazioni, come conseguenza del Grande Teorema di Talete applicato al triangolo OHH', abbiamo che le rette GG' e HH' sono parallele.

D'altra parte, indicato con W il punto medio di BC, lato comune ai triangoli ABC e PBC, per le proprietà del baricentro abbiamo AG =2 GW e PG'= 2 G'W e come conseguenza del Grande Teorema di Talete applicato al triangolo AWP abbiamo che le rette GG' e AP sono parallele.

Dunque, sono parallele le rette HH' e AP. Risultano inoltre parallele le rette AH e H'P essendo entrambe perpendicolari al lato BC, comune ai due triangoli ABC e PBC. Così il quadrilatero AHH'P è un parallelogrammo e in particolare abbiamo HH' = AP.

Vediamo allora che la traslazione di vettore AP manda il triangolo AQR nel triangolo PBC e in particolare H in H'. Essendo il punto H ortocentro di AQR oltre che di ABC abbiamo RH perpendicolare ad AQ. Così gli angoli ∠AXH e ∠AEH sono entrambi retti e il quadrilatero AXEH risulta ciclico.

A partire da tale asserzione, abbiamo infine:

$$\angle EXQ=180°-\angle AHE=180°-\angle BCA=180°-\angle BPA=\angle PAQ,$$

donde la retta EX è parallela alla retta AP.