Problema 539.

Sea el triángulo ABC con ortocentro H y P un punto de su circunferencia circunscrita, distinto de A, B y C. Sea E el pie de la altura BH, sean PAQB y PARC paralelogramos, y sea X el punto de corte de AQ y HR. Demostrar que EX es paralela a AP.

GI(GBR) IMO 1996; Djukic D., Jankovic V., Matic I. Petrovic N. (2006): The IMO Compendium, A Collection of Problems Suggested for the International Mathematical Olimpiads: 1959-2004, Springer, (pag 288)

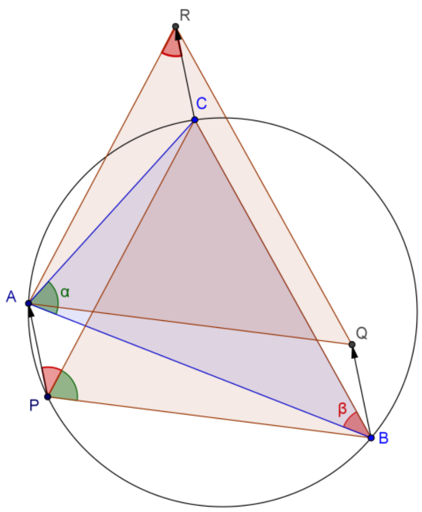

Fig. 1

DIMOSTRAZIONE

Dato il triangolo ABC definiamo gli angoli ai vertici A, B, C con α, β e γ rispettivamente. Costruendo i parallelogrammi APCR e APBQ come indicato nel testo (Fig. 1) si osserva che il triangolo di vertici AQR è congruente al triangolo di vertici PBC essendo il suo traslato secondo il vettore AP.

Per dimostrare il teorema dimostriamo innanzi tutto che l'ortocentro del triangolo ABC indicato con H coincide con l'ortocentro del triangolo AQR. Infatti (Fig. 2):

- le altezze dei due triangoli che hanno come estremo il vertice A, comune ai due triangoli, appartengono alla stessa retta dal momento che i lati dei triangoli opposti al vertice A sono paralleli. Indichiamo con AD l'altezza relativa al lato BC.

- Indicando con CF l'altezza relativa al lato AB e detto H l'ortocentro del triangolo ABC si osserva che il quadrilatero DHFB è ciclico essendo gli angoli in D e F retti . Pertanto l'angolo DHF è il supplementare di β.
- Anche il quadrilatero CHAR è ciclico essendo supplementari gli angoli AHC e ARC. Infatti l'angolo β è congruente all'angolo APC (insistendo sullo stesso arco AC) che è congruente all'angolo ARC (Fig. 1).
- In particolare ACH è congruente a ARH insistendo sullo stesso arco AH (Fig. 2). Inoltre essendo ACH complementare dell'angolo α lo sarà anche ARH perciò l'angolo AXR è retto in X . In conclusione RX è altezza del triangolo AQR che interseca l'altezza relativa al lato AQ nel punto H che è ortocentro comune.

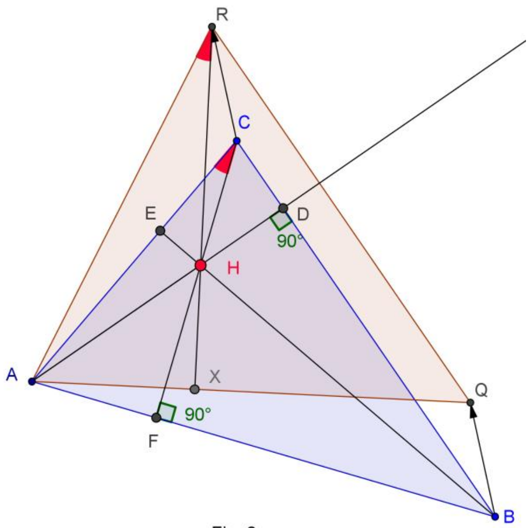

Fig. 2

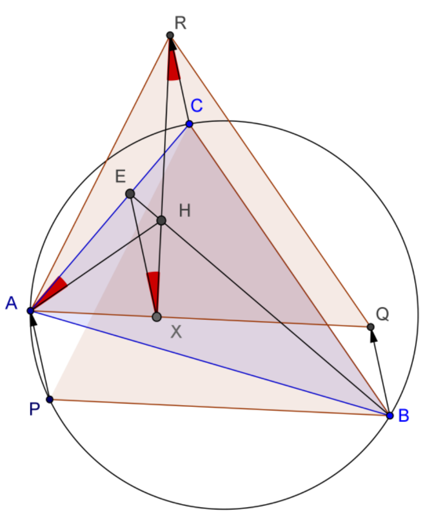

Fig. 3

Per concludere la dimostrazione del teorema basta osservare che oltre al quadrilatero CHAR anche il quadrilatero EHXA è ciclico perciò:

- L'angolo EXH è congruente all'angolo HAE poiché insistono sullo stesso arco EH.
- L'angolo HAC è congruente all'angolo CRH poiché insistono sullo stesso arco CH

Pertanto l'angolo EXH è congruente all'angolo HRC da cui segue che il segmento EX è parallelo al segmento CR che è a sua volta parallelo ad AP.

C.V.D.