

Problema 540.

Resolver y construir el triángulo rectángulo ABC , $\angle A = 90^\circ$ conocidos c y $a + b$.

Sánchez-Rubio, C. , Ripollés, M. (2000). Manual de matemáticas para preparación olímpica. Universitat Jaume I. Castelló. Problema 8 (pág. 339)

Propuesto por Ricard Peiró i Estruch Profesor de Matemáticas del IES "Abastos" (Valencia)

Ampliación del profesor Peiró:

Resolver y construir el triángulo rectángulo ABC , $\angle A = 90^\circ$ conocidos c y $a - b$.

Soluzione di Italo D'Ignazio, Teramo, Italia.

RISOLUZIONE SINTETICA.

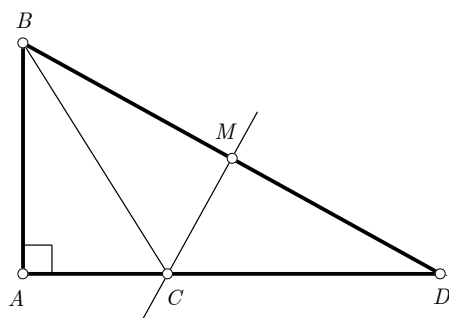


FIGURA 1

Supposto risolto il problema, sia ABC il triangolo richiesto (con $A = 90^\circ$). Si prolunghi AC di un segmento $CD = BC$. Si ha:

$$AD = AC + BC = a + b = s$$

Ciò mostra che il triangolo ABD è costruibile a partire dai dati (triangolo rettangolo di cui si conoscono i cateti).

Costruito ABD , si può ottenere il vertice C del triangolo richiesto come intersezione dell'asse di BD con la retta AD . Infatti $CD = BC$. $\square$

RISOLUZIONE ALGEBRICA.

Indicando con x l'ipotenusa e con y il cateto incognito, si ha

$$\begin{cases} c^2 + y^2 = x^2 \\ x + y = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = c^2 \\ x + y = s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{s^2 + c^2}{2s} \\ y = \frac{s^2 - c^2}{2s} \end{cases}$$

Per costruire x basta osservare che la prima delle due formule equivale a

$$2s : \sqrt{s^2 + c^2} = \sqrt{s^2 + c^2} : x$$

e che $\sqrt{s^2 + c^2}$ è l'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cateti noti s e c .

Analogamente si costruisce y tenendo presente che $\sqrt{s^2 - c^2}$ è il cateto di un triangolo rettangolo di ipotenusa s e altro cateto c . $\square$

Ampliamento del profesor Peiró.

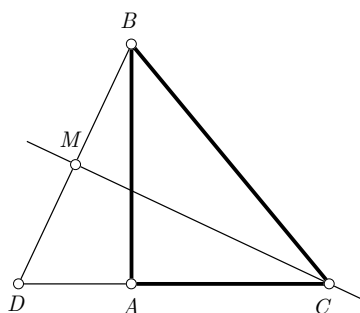


FIGURA 2

Problema analogo al precedente con la variante che si conosce la differenza $a - b = d$ in luogo della somma $a + b = s$.

Si prolunghi CA dalla parte di A e su questo prolungamento si prenda il punto D tale che $DC = CB = a$. Risulta:

$$DA = BC - AC = a - b = d$$

Pertanto ABD è costruibile a partire dai dati e C si può ottenere come intersezione della retta DA con l'asse di BD . $\square$

Osservazione. Le costruzioni precedenti sono generalizzabili al caso che si chieda la costruzione di un triangolo ABC non necessariamente rettangolo, di cui siano dati

$$\angle A = \alpha \quad , \quad BA = c \quad , \quad BC + AC = s$$

oppure

$$\angle A = \alpha \quad , \quad BA = c \quad , \quad BC - AC = d \text{ (con la condizione)} BC > AC$$

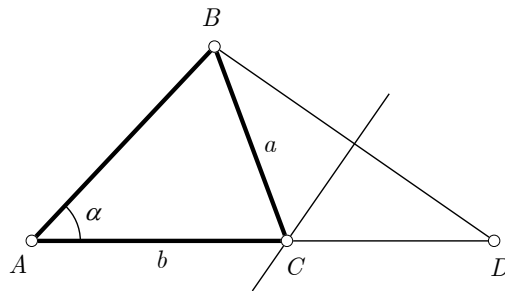


FIGURA 3